



# Contribution à l'analyse de textures en traitement d'images par méthodes variationnelles et équations aux dérivées partielles

Jean-François Aujol

## ► To cite this version:

Jean-François Aujol. Contribution à l'analyse de textures en traitement d'images par méthodes variationnelles et équations aux dérivées partielles. Mathématiques [math]. Université Nice Sophia Antipolis, 2004. Français. NNT: . tel-00006303

**HAL Id: tel-00006303**

**<https://theses.hal.science/tel-00006303>**

Submitted on 22 Jun 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

Présentée pour obtenir le titre de

Docteur en SCIENCES  
de l'Université de Nice Sophia Antipolis

Spécialité : MATHÉMATIQUES

par

Jean-François AUJOL

---

## Contribution à l'analyse de textures en traitement d'images par méthodes variationnelles et équations aux dérivées partielles

---

Soutenue publiquement le 17 juin 2004 devant le jury composé de

Gilles	<b>Lebeau</b>	<i>Président</i>
Patrick Louis	<b>Combettes</b>	<i>Rapporteur</i>
Henri	<b>Maitre</b>	<i>Rapporteur</i>
Jean-Michel	<b>Morel</b>	<i>Rapporteur</i>
Yves	<b>Meyer</b>	<i>Rapporteur invité</i>
Gilles	<b>Aubert</b>	<i>Directeur</i>
Laure	<b>Blanc-Féraud</b>	<i>Co-Directeur</i>

à 14 heures au laboratoire J.A. Dieudonné, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2



# Remerciements

Je tiens tout d’abord à remercier Gilles Lebeau d’avoir participé à mon jury de thèse et de me faire l’honneur d’en avoir accepté la présidence.

Je voudrais également remercier Patrick Louis Combettes, Henri Maitre, Yves Meyer et Jean-Michel Morel pour avoir pris le temps d’étudier attentivement ce manuscrit et pour avoir écrit chacun un rapport. Je les remercie pour leurs remarques pertinentes. Tous ont accepté spontanément ce travail, et je leur en suis reconnaissant.

Je tiens à exprimer ma gratitude à mes directeurs de thèse, Gilles Aubert et Laure Blanc-Féraud. Toujours disponibles, ils ont très grandement contribué au bon déroulement de mes trois années de thèse de par leurs encouragements, leurs conseils, et leur motivation.

Je tiens à remercier tout particulièrement Antonin Chambolle avec qui j’ai collaboré pour une partie de cette thèse.

Je souhaiterais saluer tous les membres du laboratoire J.A. Dieudonné qui m’ont accueilli pendant ma thèse. Je pense notamment à Caroline, Maelle, Alexis, Didier, Emmanuel, Guillaume C, Guillaume R, Mathieu B, Mathieu D, Jean-Pierre . . .

Je voudrais saluer tous les membres du projet ARIANA qui m’ont également accueilli pendant ces trois années : Josiane Zerubia, Xavier Descombes, Ian Jermyn, Corinne Zuzia, ainsi que tous les thésards du projet : Caroline, Karen, Marie, Emmanuel, Mathias, Oscar, Guillaume, André, Christophe . . .

Je souhaiterais terminer par un très grand merci à mes parents, à mon frère, à Simone et Jeanine, ainsi qu’à tous mes amis. J’ajoute une mention spéciale pour Stéphanie qui m’a apporté son soutien tout au long de ce travail.





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>19</b>
1.1	Comment lire cette thèse ? . . . . .	19
1.2	Partie I et II : Décomposition d'images . . . . .	19
1.3	Partie III : Un algorithme de classification d'images texturées . . . . .	22
1.4	Partie IV : Annexes . . . . .	24
<b>I</b>	<b>Espace mathématiques et modélisation</b>	<b>27</b>
<b>2</b>	<b>Quelques espaces adaptés à l'analyse d'images, et étude numérique de leurs normes</b>	<b>29</b>
2.1	L'espace $BV$ des fonctions à variations bornées . . . . .	29
2.1.1	Définitions et propriétés . . . . .	29
2.1.2	Modèle de Rudin-Osher-Fatemi (ROF) . . . . .	30
2.1.3	Discrétisation . . . . .	31
2.1.4	Algorithme de projection de Chambolle . . . . .	32
2.2	L'espace $G$ des fonctions oscillantes . . . . .	34
2.2.1	Définition de l'espace $G(\mathbb{R}^2)$ . . . . .	34
2.2.2	Une version discrète de $G$ et ses propriétés . . . . .	35
2.2.3	Calcul de la norme $G$ d'une image . . . . .	37
2.3	Espaces de Sobolev d'exposant négatif . . . . .	37
2.3.1	Définitions . . . . .	38
2.3.2	Version discrète des normes de Sobolev . . . . .	38
2.3.3	Algorithme pour calculer la semi-norme $\ \cdot\ _{-1,p}$ d'une image . . . . .	38
2.3.4	Norme $\ \cdot\ _{-1,2}$ d'un bruit blanc gaussien . . . . .	40
2.4	Espaces de Besov . . . . .	43
2.5	Exemples de calculs de normes . . . . .	45
2.5.1	Conclusion . . . . .	49
<b>II</b>	<b>Décomposition d'images</b>	<b>51</b>
<b>3</b>	<b>Modèle <math>u + v</math></b>	<b>53</b>
3.1	Introduction . . . . .	53
3.1.1	Préliminaires . . . . .	53
3.1.2	Modèle de Meyer . . . . .	53
3.1.3	Modèle de Vese-Osher . . . . .	54
3.1.4	Modèle de Osher-Solé-Vese . . . . .	54

3.2	Notre approche . . . . .	55
3.2.1	Présentation . . . . .	55
3.2.2	Algorithme . . . . .	56
3.2.3	Commentaires sur l'algorithme . . . . .	56
3.3	Résultats mathématiques . . . . .	57
3.3.1	Convergence de l'algorithme (3.2.9)–(3.2.12) . . . . .	57
3.3.2	Etude du problème limite lorsque $\lambda \rightarrow 0$ . . . . .	60
3.3.3	Lien entre le problème limite et le problème de Meyer . . . . .	62
3.4	Comparaisons . . . . .	66
3.4.1	Introduction . . . . .	66
3.4.2	Commentaires . . . . .	66
3.5	Réglage des paramètres dans le cas du débruitage . . . . .	75
3.6	Retour sur le modèle de Osher-Solé-Vese . . . . .	75
3.7	Conclusion . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Modèle <math>u + v</math> (cas continu)</b>	<b>81</b>
4.1	Préliminaires . . . . .	81
4.1.1	Introduction . . . . .	81
4.1.2	Ensemble <i>Régulier</i> . . . . .	81
4.1.3	Définition et propriétés de $G(\Omega)$ (cas continu) . . . . .	84
4.2	Etude du modèle de Meyer . . . . .	89
4.3	Algorithme . . . . .	90
4.3.1	Modèle en continu . . . . .	91
4.3.2	Existence et unicité . . . . .	91
4.3.3	Caractérisation du minimiseur $(\hat{u}, \hat{v})$ . . . . .	92
4.3.4	Etude du problème limite lorsque $\lambda \rightarrow 0$ . . . . .	93
4.3.5	Lien entre le problème limite et le modèle de Meyer . . . . .	94
4.4	Conclusion . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Applications</b>	<b>97</b>
5.1	Restauration d'images RSO . . . . .	97
5.1.1	Introduction . . . . .	97
5.1.2	Résultats sur des images synthétiques . . . . .	99
5.1.3	Images réelles . . . . .	99
5.1.4	Conclusion . . . . .	103
5.2	Compression . . . . .	106
5.2.1	Introduction . . . . .	106
5.2.2	Résultats numériques et commentaires . . . . .	110
5.2.3	Perspectives . . . . .	114
<b>6</b>	<b>Modèle <math>u + v + w</math></b>	<b>117</b>
6.1	Minimisation de normes duales . . . . .	117
6.1.1	Un peu d'analyse convexe . . . . .	117
6.1.2	Application aux modèles $u + v$ . . . . .	118
6.2	Un nouvel algorithme $u + v$ . . . . .	119
6.2.1	Principe . . . . .	119
6.2.2	Analyse mathématique . . . . .	121
6.2.3	Résultats numériques et commentaires . . . . .	121

6.3	Modèle $u + v + w$	126
6.3.1	Présentation	126
6.3.2	Algorithme	128
6.3.3	Problème limite	131
6.3.4	Résultats numériques	131
6.4	Conclusion et perspectives	137
<b>III</b>	<b>Classification d'images</b>	<b>139</b>
<b>7</b>	<b>Un algorithme de classification d'images texturées</b>	<b>141</b>
7.1	Introduction	141
7.1.1	Présentation du problème	141
7.1.2	Position du modèle dans la littérature	142
7.1.3	Principe	143
7.2	Modélisation des textures par paquets d'ondelettes	143
7.2.1	Ondelettes non décimées	143
7.2.2	Transformée en paquets d'ondelettes	144
7.2.3	Indépendance vis à vis du niveau de gris	144
7.2.4	Idée	144
7.2.5	Loi de l'énergie	146
7.2.6	Calcul des paramètres de la loi de distribution de l'énergie en fonction des moments d'ordre un et deux	146
7.3	Energie associée au problème de classification	150
7.3.1	Partition, approche par courbes de niveaux	151
7.3.2	Régularisation	151
7.3.3	Termes d'énergie	152
7.3.4	Terme d'attache aux données	154
7.3.5	La fonctionnelle finale	156
7.3.6	Remarques	157
7.4	Etude numérique	157
7.4.1	Equations d'Euler-Lagrange	157
7.4.2	Schéma dynamique	158
7.4.3	Réinitialisation	158
7.4.4	Algorithme	159
7.4.5	Exemples :	162
7.5	Classification obtenue après pré-traitement avec l'algorithme $u + v$	166
7.5.1	Démarche	166
7.5.2	Résultats	166
7.6	Perspectives	168
<b>8</b>	<b>Etude théorique de la fonctionnelle de classification</b>	<b>169</b>
8.1	Rappels sur les ensembles de périmètres finis	170
8.2	Problème à deux phases	171
8.2.1	Etude du problème (8.2.3)	172
8.2.2	Etude du problème (8.2.4)	172
8.2.3	Etude du problème (8.2.2)	174
8.2.4	Equivalence entre les problèmes (8.2.2), (8.2.3) et (8.2.4)	176

8.3	Les problèmes approchés . . . . .	179
8.3.1	Approximations régulières de $H$ et $\delta$ . . . . .	179
8.3.2	Des solutions localement continues . . . . .	181
8.3.3	Un résultat de perturbation . . . . .	183
8.3.4	“Equivalence” entre les problèmes (8.3.12) et (8.3.17) . . . . .	187
8.3.5	Retour à $\phi$ . . . . .	187
8.3.6	Passage à la limite $\alpha \rightarrow 0$ . . . . .	188
8.4	Problème à $n$ phases . . . . .	188
8.4.1	Etude du problème (8.4.3) . . . . .	189
8.4.2	Lien entre (8.4.3) et (8.4.4) . . . . .	189
8.5	Conclusion et perspectives . . . . .	189
<b>9</b>	<b>Etude théorique de l'équation de réinitialisation</b>	<b>191</b>
9.1	Introduction . . . . .	191
9.2	Distance euclidienne signée . . . . .	192
9.2.1	Quelques définitions . . . . .	192
9.2.2	Propriétés de la fonction distance signée . . . . .	194
9.2.3	Adhérence du squelette . . . . .	197
9.3	L'équation de réinitialisation . . . . .	200
9.3.1	Rappels sur les solutions de viscosité . . . . .	201
9.3.2	Existence et unicité d'une solution de viscosité pour l'EDP (9.3.1) . . . . .	202
9.3.3	Simulation numérique de l'EDP de réinitialisation . . . . .	208
9.4	Une équation plus générale . . . . .	208
9.4.1	Preliminaires techniques . . . . .	210
9.4.2	Inégalités de viscosité et unicité pour l'équation (9.4.1) . . . . .	212
9.4.3	Existence de $t_x$ et continuité de $u(x, t)$ . . . . .	217
9.5	Hypothèses utilisées dans la Section 9.4 . . . . .	231
9.6	Conclusion et perspectives . . . . .	232
<b>IV</b>	<b>Annexes</b>	<b>233</b>
<b>A</b>	<b>Ondelettes</b>	<b>235</b>
A.1	Cas 1-D . . . . .	235
A.2	Cas 2-D . . . . .	237
A.3	Débruitage par seuillage en ondelettes . . . . .	238
<b>B</b>	<b>Représentation non linéaire multi-échelle pour les images géométriques</b>	<b>241</b>
B.1	Formalisme d'Harten . . . . .	241
B.2	Représentation multi-résolution adaptée aux contours . . . . .	242
B.2.1	Formalisme 1D . . . . .	242
B.2.2	Formalisme 2D . . . . .	243
<b>C</b>	<b>Bruit de chatoiement</b>	<b>245</b>
C.1	Statistique du speckle pleinement développé . . . . .	245
C.1.1	Speckle totalement développé en 1 vue . . . . .	245
C.1.2	Statistiques du speckle totalement développé en L-vues . . . . .	250
C.2	Statistique du speckle non gaussien . . . . .	252

C.2.1	En utilisant la formule de Bayes . . . . .	252
C.2.2	Le modèle du bruit multiplicatif . . . . .	253
C.3	Quelques filtres de speckle . . . . .	254
C.3.1	Les filtres non spécifiques . . . . .	254
C.3.2	Les filtres adaptatifs . . . . .	254
C.3.3	Les filtres adaptatifs avec modélisation de la scène . . . . .	255
C.3.4	Le filtrage multi-temporel . . . . .	256
<b>D</b>	<b>Contours actifs et courbes de niveaux</b>	<b>257</b>
D.1	Introduction . . . . .	257
D.2	Rappels de Géométrie différentielle . . . . .	257
D.3	Applications aux images . . . . .	258



# Table des figures

1.1	Décomposition $f = u + v + w$ . . . . .	20
1.2	Décomposition $f = u + v$ . . . . .	21
1.3	Exemple de résultat de classification . . . . .	23
2.1	Un premier exemple . . . . .	45
2.2	Images texturées . . . . .	47
2.3	Image $BV$ . . . . .	47
2.4	Images de bruits gaussiens . . . . .	47
3.1	Lenna . . . . .	67
3.2	Comparaison pour $\sigma = 50$ . SNR=7.05 . . . . .	67
3.3	Barbara . . . . .	68
3.4	Décomposition avec notre modèle pour $\lambda = 1.0$ et $\mu = 100$ . . . . .	69
3.5	Décomposition avec le modèle ROF pour $\lambda = 43$ . . . . .	70
3.6	Décomposition avec notre modèle pour $\lambda = 2.5$ et $\mu = 35$ . . . . .	71
3.7	Décomposition avec le modèle ROF pour $\lambda = 32$ . . . . .	72
3.8	Décomposition avec le modèle VO pour $\lambda = 0.2$ et $\mu = 0.01$ . . . . .	73
3.9	Débruitage avec les algorithmes $A^2BC$ et $ROF$ . . . . .	76
3.10	Décomposition (les paramètres sont réglés de sorte que $v_{OSV}$ et $v_{A^2BC}$ aient la même norme $L^2$ ) . . . . .	78
3.11	Débruitage de rayures avec le modèle d'Osher-Sole-Vese . . . . .	79
4.1	Cas où $\Omega = B(O, R)$ ( $O'$ est sur le cercle $B(O, R)$ ) . . . . .	82
5.1	Bruit de chatolement sur un signal 1-D . . . . .	98
5.2	Image de synthèse simple ( $\lambda = 0.01$ et $\mu = 80$ ) . . . . .	100
5.3	Image de synthèse plus compliquée ( $\lambda = 0.01$ et $\mu = 80$ ) . . . . .	101
5.4	Image de synthèse plus compliquée ( $\lambda = 0.01$ et $\mu = 80$ ) : classification . . .	102
5.5	Image de la région de Bourges . . . . .	103
5.6	Image de la région de Bourges : restaurations . . . . .	104
5.7	Restauration d'une image laser . . . . .	105
5.8	Barbara . . . . .	107
5.9	Phare . . . . .	107
5.10	Décomposition de l'image Barbara ( $\lambda = 0.1$ et $\mu = 60$ ). . . . .	108
5.11	Décomposition de l'image du phare ( $\lambda = 0.1$ et $\mu = 12$ ). . . . .	109
5.12	Image compressée avec notre algorithme (UVEA) (10% des coefficients pour $u$ et $v$ ) . . . . .	110
5.13	Image compressée avec notre algorithme (UVEA) (7% des coefficients pour $u$ et 13% pour $v$ ) . . . . .	111



5.14	Image compressée avec EA (20% des coefficients)	111
5.15	Image compressée avec BW (20% des coefficients)	112
5.16	Zoom sur l'épaule de Barbara	112
5.17	Zoom sur le genou de Barbara	113
5.18	Image compressée avec notre algorithme (UVEA) (10% des coefficients pour $u$ et $v$ )	113
5.19	Image compressée avec BW (20% des coefficients)	114
5.20	Stratégie pour l'image Barbara (20% des coefficients)	115
5.21	Stratégie pour l'image phare (20% des coefficients)	115
6.1	Débruitage de bandes (algorithme (6.2.9)–(6.2.12))	122
6.2	Image du zèbre	123
6.3	Débruitage de Barbara	124
6.4	Débruitage d'une image texturée	125
6.5	Un exemple simple ( $\lambda = 0.5$ , $\mu = 120$ , $\eta = 1.0$ , Haar)	132
6.6	Image du zèbre ( $\lambda = 1.0$ , $\mu = 100$ , $\eta = 0.7$ , Daub8)	133
6.7	Image Barbara I	134
6.8	Image Barbara II ( $\lambda = 1.0$ , $\mu = 30$ , $\eta = 0.6$ , Daub8)	135
6.9	Image Barbara III ( $\lambda = 1.0$ , $\mu = 30$ , $\eta = 0.6$ , Daub8)	136
7.1	Transformée en ondelettes et filtrage	144
7.2	Décomposition en paquets d'ondelettes : à chaque étape, tous les blocs de la transformée en ondelettes sont redécomposés (on rappelle que $h_{LL}$ désigne les basses fréquences, $h_{HH}$ les hautes fréquences, $h_{LH}$ et $h_{HL}$ les fréquences médianes)	145
7.3	Graphe théorique de la distribution de l'énergie dans une sous-bande (loi (7.2.4)) et histogramme expérimental (dans une sous-bande de la transformée en paquet d'ondelettes de la texture en haut à droite de la Figure 7.10) ( $\alpha = 40.44$ et $\beta = 1.537$ ) ( $\alpha$ et $\beta$ sont calculés avec (7.2.11) et (7.2.13)).	147
7.4	Graphe de $F^{-1}$ (donné par (7.2.14))	149
7.5	Classification vue comme un problème de partition	151
7.6	Approximations $\delta_\alpha$ et $H_\alpha$ des distributions de Dirac et de Heaviside	152
7.7	Définitions des régions et de leurs contours par ensemble de niveau.	153
7.8	Initialisation manuelle	160
7.9	Initialisation par germes ("seeds")	161
7.10	Classification d'une image synthétique comportant quatre textures	162
7.11	Classification d'une image synthétique comportant deux textures	163
7.12	Classification d'une image synthétique avec 6 classes	164
7.13	Classification d'un zèbre sur un fond	165
7.14	Exemple de classification sur une image de synthèse avec quatre textures	166
7.15	Exemple de classification sur une image de synthèse avec six textures	167
8.1	Exemple où le problème (8.2.4) admet des solutions qui ne sont pas des fonctions caractéristiques	178
8.2	Approximation $\delta_\alpha$ de la distribution de Dirac $\delta$	180
8.3	Approximation $H_\alpha$ de la distribution de Heaviside $H$	180
9.1	Exemple de squelette	194

9.2	“Points de contact de degré 2” . . . . .	194
9.3	Convexité ou concavité locale de $\Gamma$ . . . . .	198
9.4	Courbure de $\Gamma$ . . . . .	199
9.5	Réinitialisation de $u_0(x) = 4d$ (où $d$ désigne la fonction distance signée à $\Omega = ]A, B[$ en $d$ . Les points $A$ et $B$ sont sur la ligne de niveau zéro de $u_0$ (ie $u_0(A) = u_0(B) = 0$ ). . . . .	209
9.6	Nature des zéros de $t \mapsto f(x, t)$ . . . . .	224
9.7	$u_0(x)$ . . . . .	230
A.1	Cas 2-D . . . . .	238
A.2	Orientation et transformée en ondelettes . . . . .	239
B.1	Cellule singulière . . . . .	242
B.2	(a) Fonction originale, (b) BW et (c) ENO-SR . . . . .	243
B.3	Configurations admissible et non-admissible . . . . .	244
B.4	Image originale, moyennes grossières et reconstruction . . . . .	244
B.5	Reconstruction d’un bord . . . . .	244



# Liste des tableaux

2.1	Valeurs de $\sqrt{C} = \ \delta\ _{-1,2} = \ \nabla W\ _Y$ . . . . .	43
2.2	Un premier exemple (cf Figure 2.1). Les rapports de norme ( $TV/G$ par exemple) ont été normalisés à 1 pour l'image géométrique. . . . .	45
2.3	Images de taille 128*128 (cf Figures 2.2, 2.3, et 2.4) . . . . .	46
2.4	Sur un échantillon de 1000 images de bruit blanc gaussien $n$ de moyenne nulle et d'écart-type égal à 1, calcul empirique de l'espérance et de l'écart-type pour les normes $X$ et $\ \cdot\ _{-1,2}$ (les valeurs de $\sqrt{C}$ sont celles du Tableau 2.1). . . .	48
2.5	Sur un échantillon de 1000 images de bruit blanc gaussien $n$ de moyenne nulle et d'écart-type égal à 1, calcul empirique de l'espérance et de l'écart-type pour les normes $TV$ et $E$ . . . . .	48
5.1	Erreurs $L^2$ (image Barbara) . . . . .	110
5.2	Erreurs $L^2$ (image du phare) . . . . .	113



# Notations

• Soit  $\Omega$  un ouvert borné Lipschitz de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $p \in ]1, +\infty[$ , on pose  $q = \frac{p}{p-1}$  (et  $q = +\infty$  si  $p = 1$ ). On note :

$\mathcal{B}(\Omega)$	Famille des sous-ensembles des Boréliens de $\Omega$ .
$\mathbb{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$	Ensemble des fonctions dans $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans $\Omega$ .
$\mathbb{D}'(\Omega)$	Espace des distributions sur $\Omega$ .
$\mathbb{D}(\bar{\Omega})$	Ensemble des restrictions à $\Omega$ des fonctions dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}^N) = C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ .
$BV(\Omega)$	Espace des fonctions à variations bornées (cf Définition 2.1.1).
$J(u) = \int_\Omega  Du $	Variation totale de $u$ (cf Définition 2.1.1).
$L^p(\Omega)$	Espace des fonctions $f$ telles que $\int_\Omega  f ^p < \infty$ .
$W^{m,p}(\Omega)$	Espace des fonctions dans $L^p(\Omega)$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre $m$ (au sens des distributions) sont dans $L^p(\Omega)$ (cf Définition 2.3.1).
$W_0^{m,p}(\Omega)$	La fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ (cf Définition 2.3.2).
$W^{-1,q}(\Omega)$	Dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ (cf Définition 2.3.2).
$B_{1,1}^1$	Espace de Besov usuel d'indices 1,1,1.
$\dot{B}_{1,1}^1$	Espace de Besov homogène usuel (cf Définition 2.4.1).
$E = \dot{B}_{-1,\infty}^\infty$	Dual de $\dot{B}_{1,1}^1$ (cf Définition 2.4.2).
$E_\delta$	Ensemble des $v$ dans $E$ tels que $\ v\ _E \leq \delta$
$G$	Espace de Meyer adapté aux signaux oscillants (cf Définitions 2.2.1 et 4.1.2).
$G_\mu$	Ensemble des $v$ dans $G$ tels que $\ v\ _G \leq \mu$
$P_K$	Projecteur orthogonal (pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ ) sur $K$ (où $K$ est un convexe fermé de $L^2(\Omega)$ ).
$\bar{f} = \frac{1}{ \Omega } \int_\Omega f$	Valeur moyenne de $f$ sur $\Omega$ .

• Si  $f$  est une image de taille  $N \times N$ , on note  $X$  l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $Y = X \times X$ , et :

$f_{i,j}$	Valeur discrète de l'image $f$ au pixel $(i, j)$ .
$(\cdot, \cdot)_X$	Produit scalaire Euclidien sur $X$ (cf (2.1.8)).
$\ u\ _X = \sqrt{(u, u)_X}$	Norme $X$ de $u$ .
$J(u) = \ u\ _{TV}$	Variation totale discrète de $u$ (cf (2.1.13)).
$G$	Espace de Meyer discret (cf Définition 2.2.3).
$G_\mu$	Ensemble des $v$ dans $G$ tel que $\ v\ _G \leq \mu$
$P_K$	Projecteur orthogonal (pour le produit scalaire euclidien) sur $K$ (où $K$ est un convexe fermé de $X$ ).
$\ \cdot\ _{1,p}$	Norme discrète de Sobolev (cf (2.3.2)).
$\ \cdot\ _{-1,p}$	Norme polaire de la norme $-1, p$ .
$\bar{f} = \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq i,j \leq N} f_{i,j}$	Valeur moyenne de $f$ sur $\Omega$ .

- Soit une fonction  $f$ . On note :

$Df$	Dérivée au sens des distributions de $f$ .
$D^2f$	Hessienne de $f$ (les dérivées sont prises au sens des distributions).
$\nabla f$	Dérivée au sens classique de $f$ (partie absolument continue de $Df$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ ).

- Soit  $\Omega$  un ouvert borné Lipschitz de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $E \subset \Omega$ , on note :

$\chi_E$	Fonction indicatrice de $E$ ( $\chi_E(x) = 0$ si $x \in E$ et $+\infty$ sinon).
$\mathbf{1}_E$	Fonction caractéristique de $E$ ( $\mathbf{1}_E(x) = 1$ si $x \in E$ et $0$ sinon).
$P(E, \Omega) = \int_{\Omega} D\mathbf{1}_E$	Périmètre de $E$ dans $\Omega$ (cf Définition 8.1.1).
$\partial E$	Frontière topologique de $E$ .
$\mathcal{F}E$	Frontière réduite de $E$ (cf Définition 8.1.2).
$\partial^* E$	Frontière essentielle de $E$ (cf Définition 8.1.3).

- Soit  $F$  une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On note :

$F^*$	Transformée de Legendre Fenchel de $F$ (cf (2.1.18)).
$\partial F$	Sous-différentiel de $F$ (cf (2.1.22)).

- Nous utiliserons aussi divers sigles :

$RSO$	Radar à Synthèse d'ouverture.
$SNR(I_1/I_2)$	<i>Signal to Noise Ratio</i> : utilisé pour estimer la qualité d'une image $I_2$ par rapport à une image référence $I_1$ . Il est défini par : $SNR(I_1/I_2) = 10 \log \left( \frac{\sigma^2(I_1)}{\sigma^2(I_1 - I_2)} \right)$ où $\sigma$ désigne la variance.
$ROF$	Algorithme de Rudin-Osher-Fatemi.
$A^2BC$	Algorithme d'Aujol-Aubert-Blanc-Féraud-Chambolle.
$VO$	Algorithme de Vese-Osher.
$OSV$	Algorithme d'Osher-Sole-Vese.
BW	Algorithme de compression utilisant les ondelettes biorthogonales.
EA	"Edge Adapted" (algorithme de compression adapté aux contours).
UVEA	Algorithme de compression utilisant un algorithme de décomposition $u + v$ et les algorithmes de compression EA et BW.
WST	Seuillage en ondelette.
DFT	Transformée de Fourier discrète.
DWT	Transformée en ondelette discrète.
sci	semi-continu-inférieurement.
scs	semi-continu-supérieurement.

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 . Comment lire cette thèse ?

Cette thèse est un travail en mathématiques appliquées. Elle aborde quelques problèmes en analyse d'images et utilise des outils mathématiques spécifiques. Elle comporte donc un mélange entre des parties mathématiques, et des parties plus dédiées au domaine du traitement d'images. Il faut bien voir qu'il y a ici une relation étroite entre les deux domaines : d'une part, nous tenons à justifier mathématiquement les méthodes que nous proposons en traitement d'images, et d'autre part nous avons à coeur d'introduire dans nos modèles mathématiques des hypothèses réalistes en traitement d'images.

Pour ne pas dérouter le lecteur appartenant plus spécifiquement à l'une ou l'autre des deux communautés, il nous est apparu nécessaire de préciser ici à quels domaines appartiennent chacun des chapitres (dans la mesure du possible, et même si les deux domaines sont simultanément présents dans tout notre travail). Les Chapitres 4, 8 et 9 sont plutôt des chapitres mathématiques. Les Chapitres 5 et 7 sont plus orientés traitement d'images. Enfin, les Chapitres 2, 3 et 6 se situent à la frontière entre les deux domaines.

Même si les différents chapitres sont relativement indépendants, nous conseillons au lecteur de les considérer dans l'ordre du manuscrit. Nous recommandons notamment la lecture du Chapitre 2 avant celle des Chapitres 3 et 6, ainsi que celle du Chapitre 3 avant celle des Chapitres 4 et 6.

### 1.2 . Partie I et II : Décomposition d'images

L'objectif des deux premières parties de cette thèse (Chapitres 2 à 6) est de proposer un modèle pour décomposer une image  $f$  en trois composantes (cf Figure 1.1) :  $f = u + v + w$ .

- La première composante,  $u$ , contient l'information géométrique de l'image. On peut la considérer comme une esquisse de l'image originale  $f$ . Elle présente les bords de l'image, ainsi que les niveaux de gris moyens.
- La seconde composante,  $v$ , contient l'information texture de l'image. Elle présente tous les détails de l'image originale  $f$  autre qu'un bruit éventuel. Il n'existe pas de définition satisfaisante de la texture au sens de la perception. La meilleure est la suivante [118] : une texture est un champ de l'image qui apparaît à un observateur comme un domaine homogène sous certaines conditions. On parle parfois de phénomène pseudo-périodique pour décrire une texture.



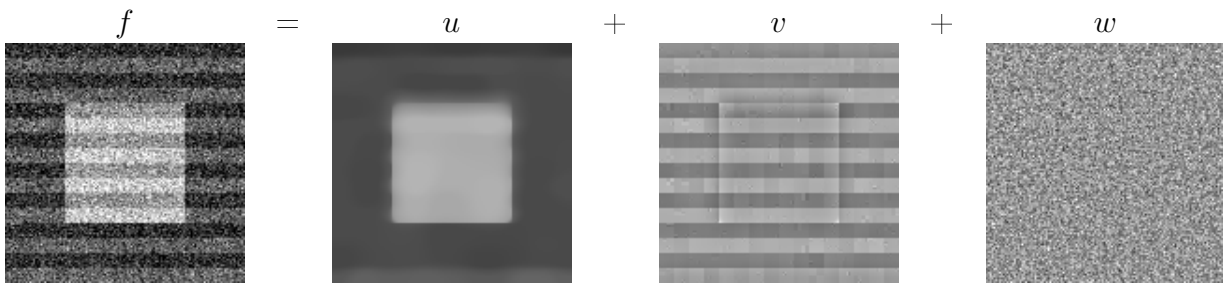


FIG. 1.1 – Décomposition  $f = u + v + w$

- La troisième composante,  $w$ , contient le bruit présent dans l'image originale. En particulier,  $u + v$  constitue une version restaurée de l'image originale  $f$ . Dans le cas où l'image  $f$  n'est pas bruitée, la composante  $w$  est alors nulle.

### D'un modèle de restauration d'image à un modèle de décomposition :

Notre travail repose sur un modèle introduit par Y. Meyer [133], basé, au départ, sur une étude critique du modèle de restauration d'image introduit par Rudin-Osher-Fatemi [149].

Etant donnée une image originale  $u$ , on suppose qu'elle a été dégradée par un bruit additif  $v$ , et éventuellement par un opérateur  $R$ . Un tel opérateur est souvent modélisé par un produit de convolution, et n'est pas nécessairement inversible (et même lorsqu'il est inversible, son inverse est souvent numériquement difficile à calculer [127]). A partir de l'image observée  $f = Ru + v$  (qui est donc une version dégradée de l'image originale  $u$ ), on cherche à reconstruire  $u$ . Si on suppose que le bruit additif  $v$  est gaussien, la méthode du Maximum a Posteriori nous conduit à chercher  $u$  comme solution du problème de minimisation

$$\inf_u \|f - Ru\|_2^2 \quad (1.2.1)$$

où  $\|\cdot\|_2$  désigne la norme dans  $L^2$ . Il s'agit d'un problème inverse mal posé. Pour le résoudre numériquement, on est amené à introduire un terme de régularisation, et à considérer le problème :

$$\inf_u \underbrace{\|f - Ru\|_2^2}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{L(u)}_{\text{régularisation}} \quad (1.2.2)$$

Dans toute la suite, nous ne considérerons que le cas où  $R$  est l'opérateur identité ( $Ru = u$ ). Le terme de régularisation classique  $L(u) = \|\nabla u\|_2^2$  (régularisation de Tychonov) n'est pas adapté au problème de restauration d'images : l'image restaurée  $u$  est alors beaucoup trop lissée (en particulier, les bords sont érodés). Une approche beaucoup plus efficace consiste à considérer la variation totale, c'est à dire à prendre  $L(u) = \int |Du|$ , et donc à regarder le problème [149] :

$$\inf_u \left( \|f - u\|_2^2 + \int |Du| \right) \quad (1.2.3)$$

En notant  $v = f - u$ , cela revient à considérer le problème de décomposition suivant :

$$\inf_{(u,v) / f=u+v} \left( \|v\|_2^2 + \int |Du| \right) \quad (1.2.4)$$

C'est le point de départ du travail de Meyer [133], qui propose de remplacer la norme  $L^2$  pour la composante  $v$  par une norme  $G$  plus adaptée aux éléments oscillants d'une image.

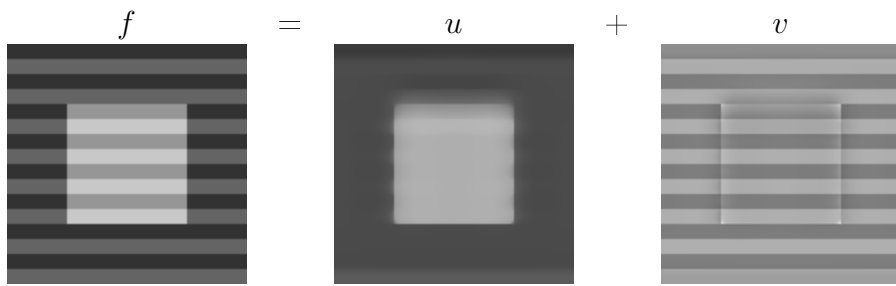


FIG. 1.2 – Décomposition  $f = u + v$

D'une manière plus générale, en introduisant cette norme  $G$ , il suggère l'utilisation d'une norme dans un espace de Sobolev à exposant négatif pour caractériser la partie oscillante d'une image.

Les principaux résultats de notre étude sont, pour ces parties I et II, détaillés dans les Chapitres 2 à 6 que nous examinons maintenant :

**Chapitre 2 :** L'objectif du Chapitre 2 est d'introduire différents espaces mathématiques susceptibles de modéliser chacune des trois composantes. Nous donnons les versions discrètes des normes de ces espaces, versions que nous utiliserons dans la suite. Nous proposons des algorithmes pour calculer ces normes. Si pour la variation totale  $\int |Du|$  ou pour la norme  $L^2$  de tels algorithmes sont standards, l'approche numérique que nous proposons pour calculer les normes de Sobolev d'exposant négatif semble nouvelle. Cela nous permet dans la Section 2.5 de mener une étude numérique de ces normes, afin de voir si elles se révèlent adaptées à l'une des trois composantes que nous recherchons.

Nous avons présenté l'essentiel de cette étude dans [28].

**Chapitre 3 :** Avant de proposer un algorithme original pour décomposer une image  $f$  en trois composantes, nous commençons par regarder une version simplifiée du problème. Dans le Chapitre 3, nous proposons un algorithme pour décomposer une image  $f$  en deux composantes (cf Figure 1.2).

La première,  $u$ , doit contenir l'information géométrique de l'image, et la seconde,  $v$ , tous les détails (les textures et le bruit éventuel). Notre algorithme repose sur le modèle introduit par Y. Meyer [133], et un algorithme de projection développé par A. Chambolle [49]. Il représente l'une des principales contributions de notre travail, et le Chapitre 3 constitue un chapitre central. Nous effectuons l'étude mathématique complète de notre algorithme : nous montrons d'une part sa convergence, et d'autre part qu'il permet bien de résoudre le problème d'Y. Meyer. Les idées que nous développons dans les preuves seront reprises aux Chapitres 4 et 6. Nous illustrons avec des exemples numériques l'efficacité de cet algorithme pour séparer une image en deux composantes, la première contenant l'information géométrique, et la seconde les textures. Notre méthode s'avère plus performante que les algorithmes classiques.

Nous avons présenté cette partie de notre travail dans [24, 25, 26].

**Chapitre 4 :** Dans [133], Y. Meyer avait fait son étude sur  $\mathbb{R}^2$  (en utilisant notamment des arguments d'analyse harmonique). Dans le Chapitre 3, nous avons effectué notre étude mathématique dans le cas discret. L'objectif du Chapitre 4 est de donner une définition de l'espace  $G$  d'Y. Meyer adaptée au cas d'un ouvert borné (qui constitue le cadre naturel en

traitement d'images), et de montrer que cette nouvelle définition est pertinente. Pour cela, nous vérifions que notre nouvel espace  $G$  garde les bonnes propriétés démontrées par Y. Meyer dans le cas  $\mathbb{R}^2$  (cette fois essentiellement avec des arguments d'analyse fonctionnelle), puis nous effectuons l'étude mathématique de notre algorithme de décomposition  $u + v$  dans ce nouveau cadre. Nous sommes ainsi en mesure de redémontrer en continu la plupart des résultats du Chapitre 3.

Nous avons présenté ce travail dans [13, 19].

**Chapitre 5 :** Dans le Chapitre 5, nous présentons deux applications de notre algorithme  $u + v$ .

- La première concerne la restauration d'images RSO non texturées. Les images RSO (Radar à Synthèse d'Ouverture) sont très fortement bruitées par un bruit de chatoiement (speckle) qui leur donne un aspect granuleux. La norme  $G$  se révèle particulièrement bien adaptée au cas du bruit de chatoiement (et à ses grandes oscillations), et notre algorithme de décomposition  $u + v$  du Chapitre 3 permet d'obtenir des résultats de restauration intéressants.

Nous avons présenté cette application dans [24, 25, 26].

- La deuxième application concerne la compression d'images. L'idée de notre algorithme est la suivante. Etant donnée une image originale  $f$  à compresser, on commence par la séparer en deux composantes à l'aide de notre algorithme de décomposition  $u + v$ , l'une géométrique, l'autre oscillante, puis on utilise des algorithmes de compression adaptés à chacune de ces deux composantes. On obtient ainsi des résultats de meilleure qualité que ceux établis avec les méthodes standards (à taux de compression égal).

Nous avons proposé ce nouvel algorithme de compression d'images dans [29, 30].

**Chapitre 6 :** Dans le Chapitre 6, nous étudions divers algorithmes de décomposition  $u + v$ . En particulier, nous présentons un nouvel algorithme de décomposition  $u + v$  qui se révèle bien adapté au débruitage d'image. En fusionnant ce modèle avec celui du Chapitre 3, nous sommes alors en mesure de proposer un algorithme original de décomposition  $u + v + w$  qui sépare une image  $f$  en trois composantes, la première contenant l'information géométrique, la seconde les textures, et la troisième le bruit éventuel. Nous effectuons l'étude mathématique de ces modèles de décomposition, et nous illustrons leur efficacité par quelques exemples numériques.

Nous avons présenté ce travail dans [28].

## 1.3 . Partie III : Un algorithme de classification d'images texturées

Grâce aux différents algorithmes de décomposition que nous avons proposés dans la deuxième partie, nous sommes désormais capable d'isoler la composante texturée d'une image. Nous nous intéressons maintenant spécifiquement à cette composante texturée. Dans cette troisième et dernière partie, nous proposons un algorithme de classification supervisée pour les images texturées, et nous en effectuons l'étude mathématique.

La classification consiste à attribuer une étiquette à chaque pixel d'une image, cette étiquette indiquant à quelle classe appartient le pixel. Elle peut être vue comme un problème de partition. C'est un des objectifs de base du traitement d'image. Elle intervient dans

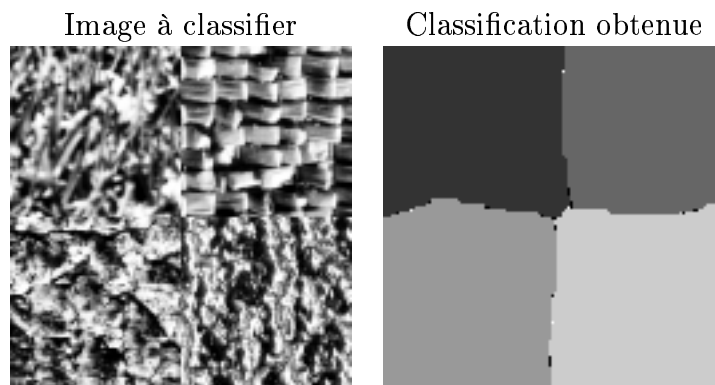


FIG. 1.3 – Exemple de résultat de classification

de nombreuses applications, comme par exemple la télédétection. La classification est un problème très proche de celui de la segmentation, dans le sens où le but visé consiste à obtenir une partition de l'image en régions homogènes. Dans la classification, chaque sous-ensemble de la partition obtenue représente une classe.

L'approche utilisée ici est issue de [151, 171] et est basée sur les contours actifs [17, 47]. La partition cherchée correspond au minimum d'une fonctionnelle. Nous résolvons le système d'EDP associé. Ces EDP guident les interfaces (courbe de niveau zéro) vers les frontières de la partition optimale.

**Chapitre 7 :** Dans ce chapitre, nous présentons l'algorithme de classification. Notre point de départ est un algorithme de classification pour les images non texturées développé par Samson et al. dans [151]. Nous modifions la fonctionnelle afin de l'adapter au cas des images texturées. Pour cela, nous construisons un terme d'attache aux données basé sur une transformée en paquets d'ondelettes. La nouveauté de notre travail provient de l'utilisation simultanée des contours actifs et d'un terme d'attache aux données spécifique aux textures basé sur une transformée en paquets d'ondelettes. Nous illustrons notre modèle à l'aide de quelques exemples de classification obtenue (cf Figure 1.3). Nous terminons ce chapitre en montrant qu'on peut utiliser en prétraitement de notre algorithme de classification l'algorithme de décomposition du Chapitre 3.

Nous avons présenté ce modèle dans [27, 23].

**Chapitre 8 :** Dans le Chapitre 8, nous effectuons l'étude mathématique de la fonctionnelle de classification que nous avons introduite au Chapitre 7. Cette fonctionnelle présente deux inconvénients majeurs : d'une part elle possède un terme de couplage, et d'autre part elle n'est pas convexe. Nous commençons par effectuer un changement de fonction afin de se ramener à une fonctionnelle convexe. Nous pouvons effectuer l'étude mathématique complète dans le cas de deux classes, et donner quelques résultats dans le cas général (de  $n$  classes).

Nous avons présenté cette étude dans [14, 20].

**Chapitre 9 :** En traitement d'images, la fonction distance signée joue un rôle très important de part ses propriétés particulières. Par exemple, en segmentation d'images, une question capitale concerne la détection des contours dans une scène. Une méthode efficace consiste à faire évoluer, à l'aide d'une Equation aux Dérivées Partielles (EDP), les ensembles

de niveau zéro d'une fonction distance  $u_0$  initiale jusqu'à ce qu'ils atteignent les contours souhaités. Si  $I(x)$  désigne le niveau de gris de l'image en  $x$ , et  $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ , alors l'EDP la plus classiquement utilisée est :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(\|\nabla I\|(x)) \operatorname{div} \left( \frac{\nabla v}{\|\nabla v\|} \right) \|\nabla v\| + \nabla g \cdot \nabla v \quad (1.3.1)$$

Malheureusement, l'EDP (1.3.1) ne garantit pas que la fonction  $v(x, t)$  reste une fonction distance signée. Pour résoudre ce problème, J-M Morel a proposé de réinitialiser le processus en utilisant toutes les cinq ou dix itérations l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{signe}(v(x, t_0)) (|Du| - 1) \\ u(x, 0) = v(x, t_0) \end{cases} \quad (1.3.2)$$

où  $v(x, t_0)$  est la fonction d'évolution au temps  $t_0$  ( $t_0 = 5$  ou  $10$ ). Nous utilisons une telle procédure de réinitialisation dans notre algorithme de classification présenté au Chapitre 7.

La théorie des solutions de viscosité s'est révélée être un cadre bien adapté pour montrer des résultats d'existence et d'unicité pour ce genre d'EDP [65, 34, 94]. Mais tous ces travaux se placent en général sous l'hypothèse que l'opérateur hamiltonien au second membre est continu par rapport à toutes ses variables, alors que l'EDP (1.3.2) possède une singularité sur  $\Gamma = \{x/v(x, t_0) = 0\}$ . Il s'agit en effet de la spécificité de notre travail : les opérateurs hamiltoniens que nous allons considérer ne seront pas continus par rapport à la variable d'espace  $x$ . Nous allons néanmoins donner un résultat d'existence et d'unicité, et aussi obtenir une formule de Hopf-Lax explicite.

Dans le Chapitre 9, nous commençons par rappeler les propriétés de la fonction distance signée. Nous donnons notamment une caractérisation de la fermeture du squelette d'une courbe, ce qui constitue un résultat nouveau. Nous nous intéressons ensuite à l'EDP (1.3.2). Puis nous étendons nos résultats à une classe d'opérateurs hamiltoniens plus générale, classe d'opérateurs néanmoins toujours discontinus en la variable d'espace  $x$ . À notre connaissance, il n'existe pas d'autre travail relatif à une discontinuité du type de celle de l'EDP (1.3.2).

Nous avons présenté l'essentiel de ce travail dans [12, 22, 21].

## 1.4 . Partie IV : Annexes

**Annexe A :** Dans cette première annexe, nous introduisons rapidement la transformée en ondelettes [125]. Cela nous permet en outre de fixer quelques notations.

**Annexe B :** Nous présentons ici l'algorithme de compression d'images adapté aux contours introduit par A. Cohen et B. Matei [131]. Par rapport aux algorithmes classiques de compression en ondelettes, il tire parti de l'information géométrique pour obtenir de meilleurs résultats de compression.

**Annexe C :** Dans cette annexe, nous donnons quelques éléments sur la modélisation du bruit de chatoiement. C'est en effet le genre de bruit rencontré en imagerie RSO. Nous rappelons également quelques filtres classiques pour éliminer ce bruit.

**Annexe D :** Dans cette dernière annexe, nous présentons la méthode des contours actifs et son approche par courbes de niveau en traitement d'images.

**Remarque :** Pour conclure, nous signalons au lecteur intéressé la page WWW :

[http ://www-sop.inria.fr/ariana/personnel/Jean-Francois.Aujol/english.html](http://www-sop.inria.fr/ariana/personnel/Jean-Francois.Aujol/english.html)

où l'on pourra trouver un certain nombre de résultats numériques complémentaires.



## Première partie

### Espace mathématiques et modélisation





# Chapitre 2

## Quelques espaces adaptés à l'analyse d'images, et étude numérique de leurs normes

Dans ce premier chapitre, nous introduisons quelques espaces adaptés au traitement d'images. Nous commençons par l'espace  $BV$  des fonctions à variation bornées : on sait depuis [149] qu'un tel espace convient particulièrement aux images géométriques. Nous présentons ensuite l'espace  $G$  introduit par Meyer dans [133] pour modéliser les phénomènes oscillants, et nous analysons la notion de dualité qui le lie à  $BV$ . Nous nous intéressons alors aux espaces de Sobolev d'exposant négatif qui sont eux aussi apparus comme adaptés aux phénomènes oscillants [143]. Nous terminons avec les espaces de Besov dont on connaît l'utilité en débruitage d'image depuis [76], ainsi qu'aux espaces de Besov d'exposants négatifs, ces derniers apparaissant eux aussi intéressants pour étudier les éléments fortement oscillants [133].

L'objectif de ce chapitre est double. Il est d'une part d'introduire les espaces avec lesquels nous allons travailler tout au long de ce manuscrit, et d'autre part d'effectuer une étude numérique des différentes normes associées à ces espaces. Si le calcul de la variation totale ou de la norme  $L^2$  d'une image ne pose pas de problème, il n'en est pas de même pour celui des normes de Sobolev d'exposant négatif ou de l'espace  $G$ . Les algorithmes que nous proposons dans ces cas sont à notre connaissance nouveaux. C'est à partir de cette étude numérique des différentes normes que nous allons construire des algorithmes de décomposition d'images dans les chapitres suivants.

Nous avons présenté l'essentiel de cette étude dans [28].

### 2.1 . L'espace $BV$ des fonctions à variations bornées

#### 2.1.1 Définitions et propriétés

On rappelle ici la définition de l'espace  $BV(\Omega)$  (on suppose que  $\Omega$ , le domaine de l'image, est un ouvert borné Lipschitz de  $\mathbb{R}^2$ ) :

**Définition 2.1.1.**  $BV(\Omega)$  est le sous-espace des fonctions  $u \in L^1(\Omega)$  telle que la quantité suivante soit finie :

$$J(u) = \sup \left\{ \int_{\Omega} u(x) \operatorname{div} (\xi(x)) dx / \xi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^2), \|\xi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\} \quad (2.1.1)$$

$BV(\Omega)$  muni de la norme

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + J(u) \quad (2.1.2)$$

est un espace de Banach.

Si  $u \in BV(\Omega)$ , la dérivée au sens des distributions  $Du$  est une mesure de Radon bornée et (2.1.1) correspond à la variation totale  $|Du|(\Omega)$ .

**Propriétés :**  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  étant un ouvert borné Lipschitz, alors [8] :

1. Si  $u$  appartient à  $BV(\Omega)$ , on a la décomposition suivante de  $Du$  :

$$Du = \nabla u \, dx + D^s u \quad (2.1.3)$$

où  $\nabla u \, dx$  est la partie absolument continue de  $Du$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^2$ , et  $D^s u$  la partie singulière. De plus, on peut redécomposer  $D^s u$  sous la forme :  $D^s u = D^j u + D^c u$  avec  $D^j u$  qui correspond aux sauts de  $u$  et  $D^c u$  à sa partie cantorienne.

2. Si  $\Omega$  est connexe et si  $Du = 0$ , alors  $u = cste$ .
3. L'application  $u \mapsto J(u)$  de  $BV(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}_+$  est semi-continue inférieurement (sci) pour la topologie de  $L^1(\Omega)$ .

4.

$$BV(\Omega) \subset L^2(\Omega) \quad (2.1.4)$$

5.

$$BV(\Omega) \subset L^1(\Omega) \quad (2.1.5)$$

avec injection compacte.

Pour plus de détails sur  $BV(\Omega)$ , on renvoie le lecteur à [8, 80].

L'intérêt de l'espace  $BV$  en traitement d'image vient essentiellement du fait qu'il autorise les discontinuités le long de courbes (plus généralement, en dimension  $N$ , le long de surfaces de codimension  $N - 1$ ). En particulier, il autorise la présence de bords. C'est un espace qui est particulièrement bien adapté pour les images géométriques (même si par-contre on sait que  $BV$  ne convient pas pour modéliser certaines images naturelles [3]). Le succès de  $BV$  en traitement d'image est étroitement lié à celui du modèle de Rudin-Osher-Fatemi [149] que nous présentons dans la sous-section suivante.

### 2.1.2 Modèle de Rudin-Osher-Fatemi (ROF)

Le débruitage est l'un des objectifs majeurs du traitement d'images [17]. Etant donnée une image dégradée  $f$ , on cherche à reconstruire l'image originale non bruitée  $u$ . L'approche variationnelle de ce genre de problème consiste à s'intéresser à la minimisation d'une fonctionnelle du type [10] :

$$\inf_u \|f - u\|_2^2 + L(u) \quad (2.1.6)$$

où  $L(u)$  est un terme de régularisation (on est amené à introduire un tel terme, car le problème de restauration est mal posé). Une régularisation classique dite de Tychonov, qui consiste à prendre  $L(u) = \int_{\Omega} |Du|^2$  ne s'avère pas un bon choix en traitement d'images. En effet, une telle régularisation est trop forte ; en particulier, les bords de l'images sont érodés.

Pour contourner cet inconvénient, les auteurs de [149] ont proposé d'utiliser une régularisation basée sur la variation totale, i.e. de prendre  $L(u) = J(u) = \int |Du|$ . L'intérêt d'un tel choix pour la fonction de régularisation provient du fait que la variation totale en dimension deux autorise les discontinuités sur des courbes, et donc en particulier la présence des bords dans l'image restaurée. Ainsi, même si numériquement l'approche s'avère plus délicate, la régularisation par la variation totale s'est imposée comme une bonne approche en traitement d'images.

Dans [149], les auteurs décomposent une image  $f$  en une composante  $u$  appartenant à  $BV(\Omega)$  et une composante  $v$  dans  $L^2(\Omega)$ . Dans ce modèle,  $v$  est supposée être le bruit. Dans une telle approche, l'énergie minimisée est la suivante :

$$\inf_{(u,v) \in BV(\Omega) \times L^2(\Omega) / f=u+v} \left( \int_{\Omega} |Du| + \frac{1}{2\lambda} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right) \quad (2.1.7)$$

En pratique dans [149], la solution numérique est calculée à partir de l'équation d'Euler-Lagrange associée à (2.1.7) (après avoir remplacé le terme  $\int |Du|$  par  $\int |\nabla u|$ ). L'étude mathématique de (2.1.7) a été faite dans [50]. Pour améliorer les résultats de restauration d'images par variation totale, il est possible de rajouter d'autres contraintes dans le processus de minimisation [63].

Nous allons décrire maintenant une méthode originale pour résoudre numériquement le problème (2.1.7).

### 2.1.3 Discrétisation

Dans ce paragraphe, nous fixons les notations relatives aux images discrètes, que nous utiliserons dans la suite de ce travail. Une image numérique, ou discrète, est un vecteur à deux dimensions de taille  $N \times N$ . On note  $X$  l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{N \times N}$ , et  $Y = X \times X$ . On munit l'espace  $X$  du produit scalaire :

$$(u, v)_X = \sum_{1 \leq i, j \leq N} u_{i,j} v_{i,j} \quad (2.1.8)$$

et de la norme :

$$\|u\|_X = \sqrt{(u, u)_X} \quad (2.1.9)$$

Pour définir une variation totale discrète, on introduit d'abord une version discrète de l'opérateur gradient. Si  $u \in X$ , le gradient  $\nabla u$  est un vecteur de  $Y$  donné par :

$$(\nabla u)_{i,j} = ((\nabla u)_{i,j}^1, (\nabla u)_{i,j}^2) \quad (2.1.10)$$

avec

$$(\nabla u)_{i,j}^1 = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & \text{si } i < N \\ 0 & \text{si } i = N \end{cases} \quad (2.1.11)$$

et

$$(\nabla u)_{i,j}^2 = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & \text{si } j < N \\ 0 & \text{si } j = N \end{cases} \quad (2.1.12)$$

La variation totale discrète de  $u$  est alors donnée par :

$$J(u) = \sum_{1 \leq i, j \leq N} |(\nabla u)_{i,j}| \quad (2.1.13)$$

On introduit également une version discrète de l'opérateur divergence. On le définit par analogie avec le cadre continu en posant :

$$\operatorname{div} = -\nabla^* \quad (2.1.14)$$

où  $\nabla^*$  est l'opérateur adjoint de  $\nabla$  : i.e., pour tout  $p \in Y$  et  $u \in X$ ,  $(-\operatorname{div} p, u)_X = (p, \nabla u)_Y$ . Il est aisé de vérifier que :

$$(\operatorname{div}(p))_{i,j} = \begin{cases} p_{i,j}^1 - p_{i-1,j}^1 & \text{si } 1 < i < N \\ p_{i,j}^1 & \text{si } i=1 \\ -p_{i-1,j}^1 & \text{si } i=N \end{cases} + \begin{cases} p_{i,j}^2 - p_{i,j-1}^2 & \text{si } 1 < j < N \\ p_{i,j}^2 & \text{si } j=1 \\ -p_{i,j-1}^2 & \text{si } j=N \end{cases} \quad (2.1.15)$$

Nous utiliserons aussi une version discrète de l'opérateur Laplacien définie par :

$$\Delta u = \operatorname{div} \nabla u \quad (2.1.16)$$

#### 2.1.4 Algorithme de projection de Chambolle

Récemment, Antonin Chambolle a proposé dans [49] un algorithme de projection pour résoudre le problème de Rudin-Osher-Fatemi. Plus précisément, le problème étudié dans [49] est le suivant :

$$\inf_{u \in X} \left( J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u\|_X^2 \right) \quad (2.1.17)$$

Comme  $J$  définie par (2.1.1) est homogène de degré un (i.e.  $J(\lambda u) = \lambda J(u) \forall u$  et  $\lambda > 0$ ), il est standard (cf [78]) que  $J^*$  la transformée de Legendre-Fenchel de  $J$ ,

$$J^*(v) = \sup ((u, v)_X - J(u)) \quad (2.1.18)$$

est la fonction indicatrice d'un ensemble convexe fermé  $K$ . Un calcul rapide montre que  $K$  s'identifie à l'ensemble :

$$K = \{\operatorname{div}(g)/g \in Y, |g_{i,j}| \leq 1 \forall i, j\} \quad (2.1.19)$$

et

$$J^*(v) = \chi_K(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in K \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.1.20)$$

Le résultat suivant est montré dans [49] :

**Proposition 2.1.1.** *La solution de (2.1.17) est donnée par :*

$$u = f - \lambda P_{\lambda K}(f) \quad (2.1.21)$$

où  $P$  est le projecteur orthogonal sur  $\lambda K$ .

**Preuve :** Donnons ici quelques éléments pour montrer (2.1.21) (nous suivons ici la démarche de [49]).

On note  $\partial J$  le sous-différentiel de  $J$  (voir [147, 97]) défini par :

$$w \in \partial J(u) \iff J(v) \geq J(u) + (w, v - u)_X \quad \forall v \in X \quad (2.1.22)$$

Si  $u$  est un minimiseur de (2.1.17), alors nécessairement :

$$0 \in \frac{u - f}{\lambda} + \partial J(u) \quad (2.1.23)$$

(2.1.23) est équivalent à :

$$\frac{f - u}{\lambda} \in \partial J(u) \quad (2.1.24)$$

On passe ensuite à une formulation duale en utilisant une identité classique en analyse convexe (cf corollaire 5.2 dans [78]), qui affirme que (2.1.24) est équivalente à  $u \in \partial J^* \left( \frac{f - u}{\lambda} \right)$  soit encore

$$0 \in \frac{f - u}{\lambda} - \frac{f}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \partial J^* \left( \frac{f - u}{\lambda} \right) \quad (2.1.25)$$

On en déduit que  $w = \frac{f - u}{\lambda}$  est un minimiseur de  $\frac{\|w - \frac{f}{\lambda}\|^2}{2} + \frac{1}{\lambda} J^*(w)$ . Comme  $J^*$  est donnée par (2.1.20)), cela implique que  $w = \frac{f - u}{\lambda}$  est la projection orthogonale de  $\frac{f}{\lambda}$  sur le convexe  $K$ .

On remarque de plus que  $P_K \left( \frac{f}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} P_{\lambda K}(f)$ , et on en déduit (2.1.21). ■

**Algorithme :** [49] donne un algorithme pour calculer  $P_{\lambda K}(f)$  qui peut s'écrire :

$$\min \left\{ \|\lambda \operatorname{div}(p) - f\|_X^2 : p / |p_{i,j}| \leq 1 \quad \forall i, j = 1, \dots, N \right\} \quad (2.1.26)$$

(2.1.26) peut se résoudre par une méthode de point fixe.

$$p^0 = 0 \quad (2.1.27)$$

et

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{p_{i,j}^n + \tau(\nabla(\operatorname{div}(p^n) - f/\lambda))_{i,j}}{1 + \tau|(\nabla(\operatorname{div}(p^n) - f/\lambda))_{i,j}|} \quad (2.1.28)$$

Et [49] donne une condition suffisante pour que l'algorithme converge :

**Théorème 2.1.1.** *Supposons que le paramètre  $\tau$  dans (2.1.28) vérifie  $\tau \leq 1/8$ . Alors  $\lambda \operatorname{div}(p^n)$  converge vers  $P_{\lambda K}(f)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .*

La solution du problème (2.1.17) est donc donnée par :

$$u = f - \lambda \operatorname{div}(p^\infty) \quad (2.1.29)$$

où  $p^\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} p^n$

Nous utiliserons dans la suite cet algorithme à plusieurs reprises. Il présente l'avantage d'être simple et efficace.

## 2.2 . L'espace $G$ des fonctions oscillantes

Dans [133], Yves Meyer a introduit un espace  $G$  pour modéliser les signaux oscillants. Ce dernier va jouer un rôle crucial dans notre travail. Dans cet espace, les signaux fortement oscillants auront une petite norme. Nous verrons que  $G$  est lié par une relation de dualité avec l'espace  $BV$ .

Nous commençons par présenter l'approche de Meyer dans [133]. Puis nous proposons une version discrète de  $G$ . Notre définition dépend du choix de discrétisation que nous avons effectué dans la sous-section 2.1.3. Dans ce cadre, nous pouvons aller plus loin que les résultats de Meyer, en précisant la notion de dualité entre  $G$  et  $BV$ , et également en donnant une caractérisation très simple de  $G$  (nous retrouverons cette caractérisation dans le cadre continu au Chapitre 4). Nous terminons cette section en proposant un algorithme pour calculer la norme  $G$  d'une image. Même s'il manque de précisions, c'est à notre connaissance le seul qui ait été développé.

### 2.2.1 Définition de l'espace $G(\mathbb{R}^2)$

Nous donnons ici la définition de Meyer [133] (définition donnée sur  $\mathbb{R}^2$  entier). Nous reviendrons plus loin sur cette définition.

**Définition 2.2.1.**  $G(\mathbb{R}^2)$  est l'espace de Banach constitué de toutes les fonctions  $f$  que l'on peut écrire

$$f = \partial_1 g_1 + \partial_2 g_2 = \operatorname{div}(g) \quad (2.2.1)$$

avec  $g_1$  et  $g_2$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

Sur  $G$  on définit la norme suivante :

$$\begin{aligned} \|v\|_G = \inf \{ \|g\|_\infty / v = \operatorname{div}(g), g = (g_1, g_2), \\ g_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^2), g_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^2), |g(x)| = \sqrt{|g_1|^2 + |g_2|^2}(x) \} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

On note  $D = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| \leq R\}$ . L'intérêt d'utiliser l'espace  $G$  pour modéliser les signaux à fortes variations provient du résultat suivant (cf [133]) :

**Lemme 2.2.1.** Soit  $f_n$ ,  $n \geq 1$  une suite de fonctions dans  $L^2(D)$  possédant les trois propriétés suivantes :

1. Il existe un ensemble compact  $K$  tel que les supports des  $f_n$ ,  $n \geq 1$  soient contenus dans  $K$ .
2. Il existe un exposant  $q > 2$  et une constante  $C$  tels que  $\|f_n\|_q \leq C$
3. La suite  $f_n$  tend vers 0 au sens des distributions.

Alors  $\|f_n\|_G$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

Yves Meyer a introduit cet espace  $G(R^2)$  en étudiant différents modèles de décomposition d'images dans [133]. Son point de départ était le modèle ROF que nous avons présenté dans la sous-section 2.1.2, ce modèle utilisant la norme  $L^2$  pour capturer la partie oscillante d'une image. Mais, comme le montre par exemple le cas de  $f_n(x) = \cos(nx)$ , une suite de fonctions peut être de plus en plus oscillantes, et pourtant sa norme  $L^2$  ne va pas diminuer. C'est pourquoi Meyer a introduit l'espace  $G(R^2)$  a priori mieux adapté aux phénomènes oscillants. On voit notamment que, grâce au Lemme 2.2.1, une suite de fonctions qui oscillent de plus

en plus (ce qui se traduit dans l'énoncé du Lemme 2.2.1 par le fait qu'elle tende vers 0 au sens des distributions) verra sa norme  $G$  également tendre vers 0, même si sa norme dans  $L^q$  reste importante.

### 2.2.2 Une version discrète de $G$ et ses propriétés

Nous allons être amenés à travailler avec une version discrète de l'espace  $G$ . Par analogie avec le cas continu, nous donnons la définition suivante (il faut remarquer que cette définition dépend du choix de discrétisation que nous avons fait plus haut (cf (2.1.11), (2.1.12) et (2.1.15)).

**Définition 2.2.2.** Soit  $G$  l'espace vectoriel défini par

$$G = \{v \in X \mid \exists g \in Y \text{ tel que } v = \operatorname{div}(g)\} \quad (2.2.3)$$

et si  $v \in G$  :

$$\begin{aligned} \|v\|_G &= \inf \{ \|g\|_\infty \mid v = \operatorname{div}(g), \\ &\quad g = (g^1, g^2) \in Y, |g_{i,j}| = \sqrt{(g_{i,j}^1)^2 + (g_{i,j}^2)^2} \} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

où  $\|g\|_\infty = \max_{i,j} |g_{i,j}|$ .

On notera :

$$G_\mu = \{v \in G \mid \|v\|_G \leq \mu\} \quad (2.2.5)$$

**Remarque :** on a

$$G_1 = K \text{ et } G_\lambda = \lambda K \quad (2.2.6)$$

où  $K$  est défini par (2.1.19).

La norme  $\|\cdot\|_G$  est étroitement liée à  $J$ , comme le montre la proposition suivante :

**Proposition 2.2.1.** Pour tout  $u \in X$  et  $v \in G$ , on a ( $J(u)$  étant défini par 2.1.13) :

$$J(u) = \sup_{v \in G_1} (u, v)_X \quad (2.2.7)$$

et

$$\|v\|_G = \sup_{J(u) \leq 1} (u, v)_X \quad (2.2.8)$$

On sait déjà (2.2.7). Pour montrer (2.2.8), Nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

**Lemme 2.2.2.** Soit  $u \in X$  et  $v \in G$ . Alors :

$$(u, v)_X \leq J(u) \|v\|_G \quad (2.2.9)$$

**Preuve :** Soit  $g \in Y$  tel que  $v = \operatorname{div}(g)$ .

$$(u, v)_X = (u, \operatorname{div}(g))_X = -(\nabla u, g)_Y \leq J(u) \|v\|_G \quad (2.2.10)$$

Et on en déduit (2.2.9). ■

**Lemme 2.2.3.** Les fonctions  $u \mapsto \frac{J(u)^2}{2}$  et  $v \mapsto \frac{\|v\|_G^2}{2}$  sont duales au sens de la dualité de Legendre-Fenchel.



**Preuve :** On veut montrer que  $u \mapsto \frac{J(u)^2}{2}$  et  $v \mapsto \frac{\|v\|_G^2}{2}$  sont duales au sens de la dualité de Legendre-Fenchel. On note  $\phi$  la fonction  $\phi(t) = \frac{t^2}{2}$ . Il est bien connu que  $\phi^*(t^*) = \frac{t^{*2}}{2}$ .

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\|\cdot\|_G^2}{2}\right)^*(u) &= \sup_{v \in X} ((u, v)_X - \phi(\|v\|_G)) \\
&= \sup_{t \geq 0} \sup_{\|v\|_G=t} ((u, v)_X - \phi(\|v\|_G)) \\
&= \sup_{t \geq 0} \sup_{\|v\|_G=1} ((u, tv)_X - \phi(t\|v\|_G)) \\
&= \sup_{\|v\|_G=1} \sup_{t \geq 0} (t(u, v)_X - \phi(t))
\end{aligned}$$

Et comme  $\phi$  est paire, on obtient :

$$\left(\frac{\|\cdot\|_G^2}{2}\right)^*(u) = \sup_{\|v\|_G=1} \phi^*((u, v)_X) = \frac{1}{2} \left( \sup_{\|v\|_G=1} (u, v)_X \right)^2 \quad (2.2.11)$$

Mais  $\sup_{\|v\|_G=1} (u, v)_X = \sup_{\|v\|_G \leq 1} (u, v)_X$ , et on conclut avec (2.2.7). ■

**Preuve de la Proposition 2.2.1 :** On sait déjà (2.2.7). On veut juste montrer (2.2.8). Le Lemme 2.2.2 donne déjà une inégalité. Montrons l'inégalité inverse. On rappelle que (cf [78]), si  $H$  est une fonction convexe, alors :  $H(u) + H^*(v) = (u, v)_X$  si et seulement si  $u \in \partial H^*(v)$ . On applique ce résultat avec  $H^*(v) = \left(\frac{J(\cdot)^2}{2}\right)^*(v)$  et  $v \in G$ . Comme  $\left(\frac{J(\cdot)^2}{2}\right)^*$  est convexe et continu, on sait que  $\partial H^*(v)$  n'est pas vide. Soit  $u \in \partial H^*(v)$ . En utilisant le Lemme 2.2.3, on obtient :  $\frac{J(u)^2}{2} + \frac{\|v\|_G^2}{2} = (u, v)_X$ , i.e :

$$\underbrace{(J(u) - \|v\|_G)^2}_{\geq 0} = 2((u, v)_X - J(u)\|v\|_G) \quad (2.2.12)$$

D'où  $(u, v)_X \geq J(u)\|v\|_G$ . Et cela conclut la preuve grâce au Lemme 2.2.2. ■

En fait, on a une caractérisation très simple de l'espace  $G$ , donnée par la proposition suivante.

**Proposition 2.2.2.** *L'espace  $G$  s'identifie avec le sous-espace suivant :*

$$X_0 = \{v \in X \mid \sum_{i,j} v_{i,j} = 0\} \quad (2.2.13)$$

**Preuve :** On sépare la preuve en deux parties :

Etape 1 :

Supposons que  $v \in G$ . Il existe donc  $g \in Y$  tel que :  $v = \operatorname{div}(g)$ . Mais  $\sum_{i,j} (\operatorname{div} g)_{i,j} = (-\nabla^* g, 1)_Y = (g, \nabla 1)_X = 0$  i.e.  $v \in X_0$ . D'où  $G \subset X_0$ .

Etape 2 :

Réciproquement, soit  $v \in X_0$ . Comme le noyau de  $\nabla$  est constitué des images constantes, i.e. des vecteurs  $x \in X$  tel que  $x_{i,j} = x_{i',j'}$  pour tout  $i, j, i', j'$ , on peut écrire une version discrète de l'inégalité de Poincaré :  $\|x - \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} x_{i,j}\|_X \leq c \|\nabla x\|_Y$ . On peut ainsi montrer facilement que le problème  $\min_{x \in X} A(x)$ , avec  $A(x) = \|\nabla x\|^2 + 2(x, v)$ , possède une solution : on commence par se ramener au cas où  $x \in X_0$  en remarquant que (on note  $\bar{x}$  la moyenne de  $x$ ) :  $A(x - \bar{x}) = A(x)$  car  $v$  est à moyenne nulle, et on montre la coercivité de l'opérateur  $A$  sur  $X_0$  à l'aide de l'inégalité discrète de Poincaré. Cette solution vérifie  $A'(x) = 0$ , i.e.,  $-2\operatorname{div}(\nabla x) + 2v = 0$ . D'où  $v = \operatorname{div}(\nabla x) \in G$ , et on conclut que  $X_0 \subset G$ . ■

Maintenant que nous avons étudié les propriétés de  $G$  et de sa norme, nous allons nous intéresser au calcul de la norme  $\|\cdot\|_G$ . En effet, l'étude numérique de cette norme nous permettra de mieux comprendre l'espace  $G$ . Cependant, contrairement à la norme  $L^2$  ou  $BV$ , un tel calcul n'est pas standard.

### 2.2.3 Calcul de la norme $G$ d'une image

On utilise l'algorithme de projection introduit par Chambolle dans [49] et que nous avons rappelé dans la sous-section 2.1.4.

Soit  $f$  une image de moyenne nulle. On remarque que si  $\lambda \geq 0$ , alors :

$$f = P_{G_\lambda}(f) \quad (2.2.14)$$

si et seulement si  $\|f\|_G \leq \lambda$ . Il suffit donc de calculer la norme de  $f - P_{G_\lambda}(f)$  pour savoir si  $\lambda$  est plus grand (si la norme de  $f - P_{G_\lambda}(f)$  est nulle) ou plus petit (si la norme est strictement positive) que  $\|f\|_G$ . On peut ainsi trouver  $\|f\|_G$  par un procédé de dichotomie.

#### Algorithme :

1. Initialisation :  $a_0 = 0$  et  $b_0 = M$ , où  $M$  est supposé être tel que  $\|f\|_G \leq M$ .
2. Itérations : On pose  $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ . On calcule  $P_{G_{c_{n+1}}}(f)$ .  
 Si  $P_{G_{c_{n+1}}}(f) \neq f$ , cela signifie que  $c_{n+1} \leq \|f\|_G$ . On pose alors  $a_{n+1} = c_{n+1}$  et  $b_{n+1} = b_n$ .  
 Sinon (i.e. si  $P_{G_{c_{n+1}}}(f) = f$ ), cela signifie que  $c_{n+1} > \|f\|_G$ . On pose donc :  $b_{n+1} = c_{n+1}$  et  $a_{n+1} = a_n$ .
3. Test d'arrêt : on arrête lorsque :  $|b_n - a_n| \leq \epsilon$ .

Nous utiliserons cet algorithme dans la Section 2.5 pour calculer la norme  $G$  de différents types d'images.

Nous allons maintenant présenter d'autres normes utiles pour modéliser les signaux oscillants.

## 2.3 . Espaces de Sobolev d'exposant négatif

L'intérêt de cette section est double. D'une part, nous proposons un algorithme pour calculer la norme  $W^{-1,p}$  d'une image (ce qui est nouveau à notre connaissance), et d'autre part nous montrons que dans le cas d'un bruit blanc gaussien de moyenne nulle, la norme  $W^{-1,2}$  et la norme  $L^2$  sont à peu près équivalentes (ce qui constitue également un résultat nouveau).

### 2.3.1 Définitions

On rappelle la définition des espaces de Sobolev (cf [2] pour plus de détails) :

**Définition 2.3.1.** Si  $p \in (1, +\infty)$ ,  $W^{1,p}(\Omega)$  est le sous-espace des fonctions dans  $L^p(\Omega)$ , telles que leur dérivée au sens des distributions appartiennent aussi à  $L^p(\Omega)$ .

**Définition 2.3.2.**  $W_0^{1,p}(\Omega)$  est la fermeture de  $C_c^1(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ . Soit  $q = \frac{p}{p-1}$  (de sorte que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ). On note  $W^{-1,q}(\Omega)$  le dual de  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

### 2.3.2 Version discrète des normes de Sobolev

Nous proposons ici des versions discrètes des normes des espaces de Sobolev (nous ne donnons pas des versions discrètes des espaces de Sobolev, nous nous contentons de définir des normes sur les espaces  $X$  et  $Y$ , ces normes correspondants à des normes de Sobolev). Nous utilisons les semi-normes suivantes sur  $Y$  ( $p \geq 1$ ) (on rappelle que nous notons  $X = \mathbb{R}^{N^2}$  et  $Y = X \times X$ ) :

$$\|\nabla u\|_p = \left( \sum_{1 \leq i,j \leq N} |\nabla u_{i,j}|^p \right)^{1/p} \quad (2.3.1)$$

(on remarque que  $J(u) = \|\nabla u\|_1$  et  $\|\nabla u\|_Y = \|\nabla u\|_2$ ). Cela nous permet d'introduire les semi-normes sur  $X$  :

$$\|u\|_{1,p} = \|\nabla u\|_p \quad (2.3.2)$$

C'est une norme sur l'espace  $X_0 = \left\{ u \in X, \sum_{i,j} u_{i,j} = 0 \right\}$ . On peut la voir comme une version discrète d'une norme de Sobolev.

On considère la semi-norme polaire associée à (2.3.2) :

$$\|v\|_{-1,p} = \sup_{\|u\|_{1,q} \leq 1} (v, u)_X = \sup_{\|u\|_{1,q} = 1} (v, u)_X = \sup_{\|\nabla u\|_q = 1} (v, u)_X \quad (2.3.3)$$

C'est la semi-norme discrète que l'on utilisera pour les espaces de Sobolev d'exposant négatif.

### 2.3.3 Algorithme pour calculer la semi-norme $\|\cdot\|_{-1,p}$ d'une image

Soit  $p \in (1, +\infty)$  et  $f$  une fonction à moyenne nulle (i.e.  $\sum_{1 \leq i,j \leq N} f_{i,j} = 0$ ).

On veut calculer  $\|f\|_{-1,p}$  (cf (2.3.3)). On pose  $q = \frac{p}{p-1}$  (de sorte que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ).

On rappelle que  $\|u\|_{1,q} = \|\nabla u\|_q$  (cf (2.3.2)) et :

$$\|f\|_{-1,p} = \sup_{\|u\|_{1,q} \leq 1} (f, u)_X = \sup_{\|u\|_{1,q} = 1} (f, u)_X = \sup_{\|\nabla u\|_q = 1} (f, u)_X \quad (2.3.4)$$

On étudie ensuite le problème de minimisation suivant :

$$\min_{u \in X} (F(u) - (f, u)_X) \quad (2.3.5)$$

où

$$F(u) = \frac{1}{q} \sum_{1 \leq i,j \leq N} |\nabla u_{i,j}|^q = \frac{1}{q} \|\nabla u\|_q^q \quad (2.3.6)$$

**Proposition 2.3.1.** *Si  $\tilde{u}$  est le minimiseur de (2.3.5), alors on a pour  $1 \leq i, j \leq N$  :*

$$(\operatorname{div}(|\nabla \tilde{u}_{i,j}|^{q-2} \nabla \tilde{u}_{i,j}))_{i,j} = f_{i,j} \quad (2.3.7)$$

De plus, on a aussi :

$$\|f\|_{-1,p}^p = \|\nabla \tilde{u}\|_q^q = \sum_{1 \leq i,j \leq N} |\nabla \tilde{u}_{i,j}|^q = qF(\tilde{u}) \quad (2.3.8)$$

En particulier, lorsque  $p = 2$ , on obtient :

$$\Delta \tilde{u} = f \quad (2.3.9)$$

et

$$\|f\|_{-1,2} = \|\nabla \tilde{u}\|_Y = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq N} |\nabla \tilde{u}_{i,j}|^2} \quad (2.3.10)$$

**Preuve :** (2.3.7) est l'équation d'Euler-Lagrange de (2.3.5), et son calcul est standard une fois qu'on a remarqué que  $(F'(u), h)_X = |\nabla u|^{q-2}(\nabla u, \nabla h)_X$ .

On s'intéresse maintenant à (2.3.8). Il est bien connu que la transformée de Legendre-Fenchel de  $\frac{1}{q}\|f\|_{1,q}^q$  est  $\frac{1}{p}\|f\|_{-1,p}^p$ , comme le montre le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{q}\|f\|_{1,q}^q\right)^* &= \sup_u \left( (f, u)_X - \frac{1}{q}\|\nabla u\|_q^q \right) \\ &= \sup_{\{t \geq 0, u / \|\nabla u\|_q = 1\}} \left( (f, tu)_X - \frac{t^q}{q}\|\nabla u\|_q^q \right) \\ &= \sup_{\{t \geq 0, u / \|\nabla u\|_q = 1\}} \left( t(f, u)_X - \frac{t^q}{q} \right) \\ &= \sup_{t \geq 0} \left( \sup_{\|\nabla u\|_q = 1} t(f, u)_X - \frac{t^q}{q} \right) \\ &= \sup_{t \geq 0} \left( t\|f\|_{-1,p} - \frac{t^q}{q} \right) \\ &= \frac{1}{p}\|f\|_{-1,p}^p \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$-\frac{1}{p}\|f\|_{-1,p}^p = \min_u (F(u) - (f, u)_X) = F(\tilde{u}) - (f, \tilde{u})_X \quad (2.3.11)$$

La solution  $\tilde{u}$  de (2.3.5) satisfait

$$F(\tilde{u}) = \frac{1}{q} \sum_{1 \leq i,j \leq N} |\nabla \tilde{u}_{i,j}|^q = \frac{1}{q}\|\nabla \tilde{u}\|_q^q \quad (2.3.12)$$

et d'après l'identité d'Euler, on a :  $(F'(\tilde{u}), \tilde{u})_X = qF(\tilde{u})$ . On en déduit donc que :

$$(f, \tilde{u})_X = qF(\tilde{u}) \quad (2.3.13)$$

De (2.3.11), on obtient :

$$-\frac{1}{p}\|f\|_{-1,p}^p = (1 - q)F(\tilde{u}) = -\frac{q}{p}F(\tilde{u}) \quad (2.3.14)$$

■

### Algorithme pour calculer $\|f\|_{-1,p}$

D'après la Propositions 2.3.1, pour calculer  $\|f\|_{-1,p}$ , il suffit de calculer le minimum de (2.3.5), car :

$$\|f\|_{-1,p}^p = \frac{1}{q} \|\nabla \tilde{u}\|_q^q = \frac{1}{q} \sum_{1 \leq i,j \leq N} |\nabla u_{i,j}|^q = qF(\tilde{u}) \quad (2.3.15)$$

On peut calculer le minimum de  $F$  de diverses manières (par une descente de gradient par exemple).

**Remarque :** Dans le cas  $p = 2$ , le calcul de la norme  $\|\cdot\|_{-1,2}$  est immédiat en utilisant la Transformée de Fourier discrète (voir la fin de la sous-section 2.3.4). En effet, dans ce cas, d'après la Proposition 2.3.1, si  $f$  est à moyenne nulle, on a :

$$\|f\|_{-1,2}^2 = (-f, \Delta^{-1}(f))_X \quad (2.3.16)$$

Nous sommes désormais capable de calculer la norme  $\|\cdot\|_{-1,p}$  d'une image, et nous avons un algorithme particulièrement efficace dans le cas de la norme  $\|\cdot\|_{-1,2}$ . Nous allons maintenant étudier la norme  $\|\cdot\|_{-1,2}$  d'un bruit blanc gaussien, d'abord théoriquement, puis numériquement.

#### 2.3.4 Norme $\|\cdot\|_{-1,2}$ d'un bruit blanc gaussien

On considère une image  $n = (n_{i,j})$  de taille  $N \times N$ . Pour simplifier, on utilise des conditions périodiques dans cette sous-section (mais seulement dans cette sous-section). On n'utilise donc pas (2.1.11), (2.1.12) et (2.1.15), mais un gradient discret et une divergence discrète avec des conditions de bords périodiques. On suppose que  $n$  est une image d'un bruit blanc gaussien de moyenne nulle ; i.e. pour tout  $(i,j)$ ,  $n_{i,j}$  suit une loi gaussienne dont la densité de probabilité s'écrit :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.3.17)$$

où  $\sigma^2$  est la variance du bruit.

Le résultat suivant donne un lien entre la norme  $\|\cdot\|_{-1,2}$  et la norme  $X$  d'un bruit blanc gaussien. On rappelle que si  $Z$  est une variable aléatoire de densité de probabilité  $p_Z$ , on note  $E(Z) = \int z p_Z(z) dz$  l'espérance de  $Z$ .

#### Proposition 2.3.2.

$$E(\|n\|_{-1,2}^2) = C.E(\|n\|_X^2) \quad (2.3.18)$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend que de la taille de l'image.

Nous calculerons la constante  $C$  à la fin de cette sous-section (cf Tableau 2.1). Cette proposition donne un test simple pour savoir si une image peut être celle d'un bruit blanc gaussien ou non. Elle peut aussi se révéler utile pour le réglage des paramètres d'un algorithme de débruitage utilisant la norme  $\|\cdot\|_{-1,2}$ .

**Preuve de la Proposition 2.3.2 :** On sépare la preuve en deux parties.

**  tape 1 :** On commence par calculer  $E(\|n\|_{-1,2}^2)$ .

On considère la fonctionnelle :

$$\inf_u F(u) \quad (2.3.19)$$

où

$$F(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_Y^2 - (n, u)_X \quad (2.3.20)$$

$F$  est convexe et sci. D'où il existe  $\tilde{u}$  solution du problème (2.3.19). Comme dans la sous-section 2.3.3, on obtient :

$$(\nabla \tilde{u}, \nabla h)_Y = (n, h)_X \quad \forall h \text{ à moyenne nulle.} \quad (2.3.21)$$

On note  $\delta$  l'image telle que  $\delta_{0,0} = 1$ , et  $\delta_{i,j} = 0$  sinon. On note  $W$  la solution du problème :

$$\inf_u \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \delta u \right) \quad (2.3.22)$$

et on a donc  $(\nabla W, \nabla h)_Y = (\delta, h)_X$  pour tout  $h$  à moyenne nulle. On introduit une convolution discrète :

$$f * g(x, y) = \sum_{i,j} f_{i,j} g_{x-i, y-j} \quad (2.3.23)$$

Il est facile de vérifier que  $\delta * f = f * \delta = f$  pour tout  $f$  (en fait,  $W$  est la fonction de Green associée au problème (2.3.19)).

On considère maintenant  $u = n * W$  ; i.e.  $u = \sum_{i,j} u_{i,j}$ , avec

$$u_{i,j}(x, y) = n_{i,j} W_{x-i, y-j} \quad (2.3.24)$$

$u$  est la solution du problème (2.3.19). Si  $h$  est à moyenne nulle, alors  $(\nabla u, \nabla h)_Y = (n * \nabla W, \nabla h)_Y = (\nabla W, \hat{n} * \nabla h)_Y = (\delta, \hat{n} * h)_X = (n * \delta, h)_X = (n, h)_X$  (on a utilisé le fait que  $(n * a, b)_X = (a, \hat{n} * b)_X$  où  $\hat{n}_{i,j} = -n_{i,j}$ ). D'après (2.3.10), on sait que  $\|n\|_{-1,2} = \|\nabla u\|_2$ . On remarque que  $\nabla u = n * \nabla W$ . D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} |\nabla u_{i,j}|^2 &= (n * \nabla W, n * \nabla W)_Y \\ &= (n, n * W)_X \\ &= \sum_{k,l} n_{k,l} n * W(k, l) \\ &= \sum_{k,l} n_{k,l} \sum_{i,j} n_{i,j} W_{k-i, l-j} \end{aligned}$$

On conclut que :

$$\sum_{i,j} |\nabla u_{i,j}|^2 = \sum_{i,j,k,l} n_{i,j} n_{k,l} W_{k-i, l-j} \quad (2.3.25)$$

Et donc :

$$E \left( \sum_{i,j} |\nabla u_{i,j}|^2 \right) = E \left( \sum_{i,j,k,l} W_{k-i, l-j} n_{i,j} n_{k,l} \right) = \sum_{i,j,k,l} W_{k-i, l-j} E(n_{i,j} n_{k,l}) \quad (2.3.26)$$

Comme les  $n_{i,j}$  sont indépendantes, on a  $E(n_{i,j}n_{k,l}) = E(n_{i,j})E(n_{k,l})$  dès que  $(i,j) \neq (k,l)$ . De plus,  $E(n_{i,j}) = 0$ , et  $E(n_{i,j}^2) = \sigma^2$ . D'où :

$$E\left(\sum_{i,j} |\nabla u_{i,j}|^2\right) = \sigma^2 \sum_{i,j} W_{i-i,j-j} \quad (2.3.27)$$

On obtient donc :

$$E\left(\sum_{i,j} |\nabla u_{i,j}|^2\right) = N^2 \sigma^2 W_{0,0} \quad (2.3.28)$$

On peut aussi observer que :

$$\sum_{i,j} |\nabla W_{i,j}|^2 = (\nabla W, \nabla W)_Y = (\delta, W)_X = W_{0,0} \quad (2.3.29)$$

On peut ainsi réécrire (2.3.28) :

$$E(\|\nabla u\|_Y^2) = N^2 \sigma^2 \|\nabla W\|_Y^2 \quad (2.3.30)$$

(et d'après la Proposition 2.3.1 on sait que  $\|\nabla u\|_Y = \|n\|_{-1,2}$ )

**Etape 2 :** Maintenant que nous avons calculé l'espérance de la norme  $\|\cdot\|_{-1,2}$  d'un bruit, on va calculer l'espérance de la norme  $L^2$

On a :

$$\|n\|_X^2 = \sum_{i,j} (n_{i,j})^2 \quad (2.3.31)$$

D'où

$$E(\|n\|_X^2) = \sum_{i,j} E((n_{i,j})^2) \quad (2.3.32)$$

Et on obtient :

$$E(\|n\|_X^2) = N^2 \sigma^2 \quad (2.3.33)$$

On montre ainsi le résultat de la Proposition 2.3.2 avec  $C = \|\nabla W\|_Y^2 = W_{0,0} = \|\delta\|_{-1,2}^2$ .

■

### Remarque : Calcul de la constante $C$ de la Proposition 2.3.2

On note  $m_\delta$  la moyenne de  $\delta$ , et  $\dot{\delta} = \delta - m_\delta$ . De (2.3.21), on obtient que :  $\Delta W = -\dot{\delta}$ . On peut donc écrire formellement que  $W = -\Delta^{-1}(\dot{\delta})$ . On a montré que  $C = \|\dot{\delta}\|_{-1,2}^2 = \|\nabla W\|_Y^2$ . On a donc  $C = (\nabla \Delta^{-1}(\dot{\delta}), \nabla \Delta^{-1}(\dot{\delta}))_Y = (-\dot{\delta}, \Delta^{-1}(\dot{\delta}))_X$ . Il reste à calculer  $\Delta^{-1}(\dot{\delta})$ . On peut le faire facilement en utilisant la transformée de Fourier discrète (TFD). On rappelle que la TFD d'une image discrète  $(f(m, n))$  ( $0 \leq m \leq M-1$  et  $0 \leq n \leq N-1$ ) est donnée par ( $0 \leq p \leq M-1$  et  $0 \leq q \leq N-1$ ) :

$$\mathcal{F}(f)(p, q) = F(p, q) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) e^{-j(2\pi/M)pm} e^{-j(2\pi/N)qn} \quad (2.3.34)$$

et la transformée inverse est :

TAB. 2.1 – Valeurs de  $\sqrt{C} = \|\delta\|_{-1,2} = \|\nabla W\|_Y$

Taille de l'image	$16^2$	$32^2$	$64^2$	$128^2$	$256^2$	$512^2$	$1024^2$	$2048^2$
$\sqrt{C}$	0.69	0.77	0.84	0.91	0.97	1.01	1.07	1.12

$$f(m, n) = \frac{1}{N^2} \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} F(p, q) e^{j(2\pi/M)pm} e^{j(2\pi/N)qn} \quad (2.3.35)$$

On a de plus  $\|\mathcal{F}(f)\|_X^2 = N^2 \|f\|_X^2$  et  $(\|\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)\|_X = N^2 (f, g)_X$ .

Remarquons que  $\mathcal{F}(\delta)(p, q) = 1 \forall p$ , et on peut vérifier que  $\mathcal{F}(\delta)(p, q) = 0$  si  $p = q = 0$  et 1 sinon.

On a  $\Delta f(m, n) = f(m+1, n) + f(m-1, n) + f(m, n+1) + f(m, n-1) - 4f(m, n)$ . Un calcul standard donne :

$$\mathcal{F}(\Delta f)(p, q) = 2 \left( \cos\left(\frac{2\pi}{N}p\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{N}q\right) - 2 \right) \mathcal{F}(f)(p, q) \quad (2.3.36)$$

On conclut que, si  $f$  est de moyenne nulle, alors pour  $(p, q) \neq (0, 0)$  :

$$\mathcal{F}(\Delta^{-1}f)(p, q) = \frac{1}{2 \left( \cos\left(\frac{2\pi}{N}p\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{N}q\right) - 2 \right)} \mathcal{F}(f)(p, q) \quad (2.3.37)$$

D'où

$$\mathcal{F}(\Delta^{-1}\delta)(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = q = 0 \\ \frac{1}{2 \left( \cos\left(\frac{2\pi}{N}p\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{N}q\right) - 2 \right)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3.38)$$

de sorte que

$$C = -(\delta, \Delta^{-1}\delta)_X = \frac{1}{N^2} \sum_{(p,q) \neq (0,0)} \frac{1}{2 \left( 2 - \cos\left(\frac{2\pi}{N}p\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{N}q\right) \right)} \quad (2.3.39)$$

On a calculé de cette manière la constante  $C$  pour différentes tailles d'images (cf le Tableau 2.1). On peut vérifier que  $C(N)$  a un comportement en  $\log(N)$ .

Nous allons maintenant nous intéresser à une dernière classe d'espaces, les espaces de Besov.

## 2.4 . Espaces de Besov

Quelques rappels sur les ondelettes sont donnés dans l'Annexe A.

On note  $\{\psi_{j,k}\}$  une base d'ondelettes. Une fonction  $f$  dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  s'écrit :

$$f = \sum_{j,k} c_{j,k} \psi_{j,k} \quad (2.4.1)$$

où les  $c_{j,k}$  sont les coefficients en ondelettes de  $f$ , et on a :  $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \sum_{j,k} c_{j,k}^2$ .

Une famille d'espaces adaptée aux ondelettes est celle des espaces de Besov  $B_{p,q}^s$  (pour  $0 < s < \infty$ ,  $0 < p \leq \infty$  et  $0 < q \leq \infty$ ) [133, 125, 59, 50].  $B_{p,q}^s$  correspond schématiquement aux fonctions possédant  $s$  "dérivées" dans  $L^p(\mathbb{R}^2)$ , le troisième paramètre  $q$  permettant d'ajuster avec précision la régularité.



Remarque : si  $p = q = 2$ , alors  $B_{2,2}^s$  est l'espace de Sobolev  $W^{s,2}$ , et lorsque  $s < 1$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , et  $q = \infty$ , alors  $B_{p,\infty}^s$  est l'espace de Lipschitz  $Lip(s, L^p(\mathbb{R}^2))$ .

On peut donner une définition intrinsèque des espaces de Besov  $B_{p,q}^s$  et de leur norme  $\|\cdot\|_{B_{p,q}^s}$  à partir des modules de régularité de  $f$  [59, 50]. Si on suppose que l'ondelette choisie  $\psi$  possède au moins  $s+1$  moments nuls et est de régularité au moins  $C^{s+1}$ , alors si  $f \in B_{p,q}^s$ , la norme  $\|f\|_{B_{p,q}^s}$  est équivalente à :

$$\left( \sum_k \left( \sum_j 2^{skp} 2^{k(p-2)} |c_{j,k}|^p \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.4.2)$$

(les constantes d'équivalence dépendent de l'ondelette choisie).

*Dans la suite, nous utiliserons toujours la norme équivalente (2.4.2) pour  $\|f\|_{B_{p,q}^s}$ .*

Dans notre travail, nous nous intéresserons essentiellement aux versions homogènes des espaces de Besov, définies par :

$$\dot{B}_{p,q}^s = B_{p,q}^s / \{u \in B_{p,q}^s / \nabla u = 0\} \quad (2.4.3)$$

**Definition 2.4.1.**  $\dot{B}_{1,1}^1$  est l'espace de Besov homogène usuel (cf [133]). Soit  $\psi_{j,k}$  une base orthonormale composée d'ondelettes régulières à supports compacts.  $\dot{B}_{1,1}^1$  est un sous-espace de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et une fonction  $f$  appartient à  $\dot{B}_{1,1}^1$  si et seulement si :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |c_{j,k}| 2^{j/2} < +\infty \quad (2.4.4)$$

Dans [133], l'auteur suggère l'utilisation de l'espace dual de  $\dot{B}_{1,1}^1$ , l'espace  $E = \dot{B}_{-1,\infty}^\infty$  pour modéliser les phénomènes oscillants.

**Definition 2.4.2.** L'espace dual de  $\dot{B}_{1,1}^1$  est l'espace de Banach  $E = \dot{B}_{-1,\infty}^\infty$ . Il est caractérisé par le fait que les coefficients en ondelettes d'une fonction généralisée dans  $E = \dot{B}_{-1,\infty}^\infty$  sont dans  $l^\infty(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2)$ .

**Remarque :** on a les inclusions suivantes :

$$\dot{B}_{1,1}^1 \subset \dot{B}V \subset G \subset E = \dot{B}_{-1,\infty}^\infty \quad (2.4.5)$$

où  $\dot{B}V$  désigne la version homogène de  $BV$  :  $\dot{B}V = BV / \{u \in BV / \nabla u = 0\}$ . En allant de gauche à droite dans les inclusions, on autorise le signal à être de plus en plus irrégulier. On verra plus loin que  $BV$  modélise bien la partie géométrique de l'image,  $G$  les textures, et  $E$  le bruit.

TAB. 2.2 – Un premier exemple (cf Figure 2.1). Les rapports de norme ( $TV/G$  par exemple) ont été normalisés à 1 pour l’image géométrique.

Normes/Images	Images géométrique	Image texturée	Bruit gaussien ( $\sigma = 85$ )
$TV$	64 600	1 000 000	2 100 000
$L^2$	9 500	9 500	9 500
$\ \cdot\ _{-1,2}$	300 000	33 000	9 100
$G$	2 000	360	120
$E$	355	749	287
$TV/G$	1	86	540
$TV/E$	1	7.3	40
$TV/\ \cdot\ _{-1,2}$	1	140	1070
$E/G$	1	12	13

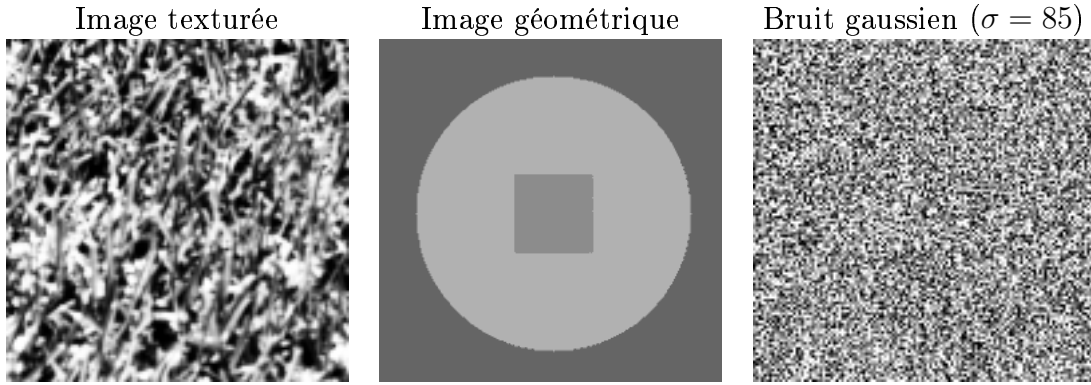


FIG. 2.1 – Un premier exemple

## 2.5 . Exemples de calculs de normes

Grâce aux algorithmes que nous venons de proposer pour les différentes normes, nous sommes désormais en mesure d’étudier numériquement ces normes pour voir si elles se révèlent plus ou moins bien adaptées à certains types d’images. Nous distinguerons trois catégories d’images :

1. Les images géométriques.
2. Les images de textures.
3. Les images de bruits.

En ce qui concerne la norme  $E$ , on précise à chaque fois l’ondelette mère utilisée (Haar pour l’ondelette de Haar, Daub8 pour l’ondelette de Daubechies avec 8 moments nuls, Daub10 pour l’ondelette de Daubechies avec 10 moments nuls), ainsi que l’ordre utilisé pour la décomposition (cf l’annexe A).

**Un premier exemple :** Les images de la Figures 2.1 sont toutes de même norme  $L^2$  (afin de comparer les autres normes). Le Tableau 2.2 présente les valeurs des différentes normes. Il illustre bien la supériorité de la norme  $G$  sur la norme  $L^2$  pour capturer des phénomènes

TAB. 2.3 – Images de taille 128\*128 (cf Figures 2.2, 2.3, et 2.4)

Images	$TV$	$L^2$	$G$	$\ \cdot\ _{-1,2}$	$E$ (Daub10, ordre 3)
param1	1 000 000	9 500	360	33 000	730
param2	800 000	9 500	300	26 000	690
param3	980 000	9 450	320	30 000	890
param4	1 100 000	9 450	290	22 000	630
cercles	18 000	3 000	2 000	18 000	280
G20	570 000	2 600	31	2 500	73
G30	850 000	3 900	50.5	3 700	110
G50	1 400 000	6 300	84	6 100	180
G85	2 100 000	9 500	120	9 100	290

oscillants dans un processus de minimisation (la norme  $G$  des signaux oscillants est beaucoup plus faible que celle de l'image géométrique), comme annoncé dans [133].

Il illustre également pourquoi l'utilisation de la norme  $E$  est bien adaptée pour isoler le bruit. En effet, texture et bruit ont une faible norme  $G$ , mais seul le bruit a une faible norme  $E$  (et il est important de noter que la norme  $E$  de l'image géométrique s'intercale entre celle du bruit et celle de la texture). Considérons un algorithme de décomposition itératif appliqué à une image  $f$  (avec comme initialisation :  $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ ) et qui respecterait le plan suivant :

1. On obtient d'abord la composante bruit  $w_{n+1}$  en minimisant la norme  $E$  de  $f - u_n - v_n$  (donc celle de  $f$  à la première itération, ce qui signifie que dès la première itération  $w_{n+1}$  contient surtout du bruit).
2. On obtient ensuite la composante texture  $v_{n+1}$  en minimisant la norme  $G$  de  $f - u_n - w_n$  (qui ne contient presque plus de bruit dès la première itération, ce qui implique que  $v_{n+1}$  représente déjà essentiellement la texture).
3. Et on obtient la composante géométrique  $u_{n+1}$  en minimisant la norme  $TV$  de  $f - v_n - w_n$  (qui contient déjà l'essentiel de l'information géométrique dès la première itération).
4. On répète les étapes précédentes jusqu'à convergence.

Un tel algorithme aurait de très bonnes chances d'effectuer la décomposition d'une image originale  $f$  en trois composantes : une composante  $u$  contenant l'information géométrique, une composante  $v$  contenant l'information texture, et une composante  $w$  contenant le bruit. C'est effectivement ce que l'on fera au Chapitre 6 lorsque l'on proposera un algorithme de décomposition  $u + v + w$  (algorithme (6.3.19)–(6.3.23)). Et les résultats numériques (Figures 6.5 à 6.9) confirmeront cette analyse.

En ce qui concerne les normes des images de bruits blancs gaussiens, on a vérifié que les résultats ne dépendaient pas du tirage du bruit gaussien : pour chaque bruit, on a créé dix images différentes sur lesquelles nous avons calculé les normes. On a remarqué que la variance des normes  $G$  et  $\|\cdot\|_{-1,2}$  sont légèrement supérieures à celles de la variation totale  $TV$  et de la norme  $L^2$ , mais elles restent néanmoins très faibles par rapport aux valeurs moyennes : on

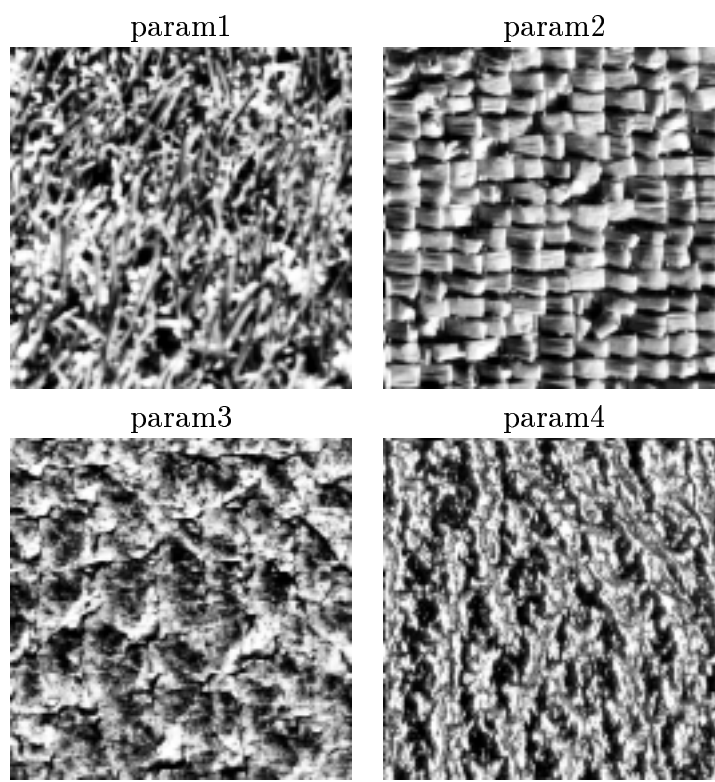


FIG. 2.2 – Images texturées

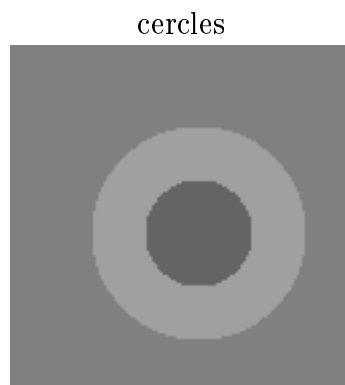


FIG. 2.3 – Image  $BV$

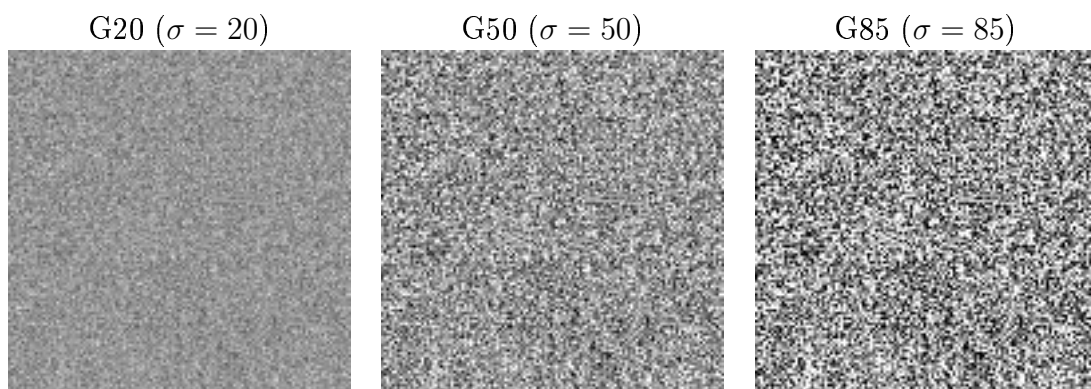


FIG. 2.4 – Images de bruits gaussiens

TAB. 2.4 – Sur un échantillon de 1000 images de bruit blanc gaussien  $n$  de moyenne nulle et d'écart-type égal à 1, calcul empirique de l'espérance et de l'écart-type pour les normes  $X$  et  $\|\cdot\|_{-1,2}$  (les valeurs de  $\sqrt{C}$  sont celles du Tableau 2.1).

Taille d'image	$16^2$	$32^2$	$64^2$	$128^2$	$256^2$	$512^2$
$E(\ n\ _X)$	16.0	32.0	64.0	128	256	512
$\sqrt{Var(\ n\ _X)}$	0.71	0.69	0.72	0.73	0.73	0.70
$E(\ n\ _{-1,2})$	11.2	24.7	54	116	247	523
$\sqrt{Var(\ n\ _{-1,2})}$	0.97	1.8	3.3	6.0	12	22
$\frac{E(\ n\ _X)}{E(\ n\ _{-1,2})}$	0.70	0.77	0.84	0.91	0.96	1.02
$\sqrt{C}$	0.69	0.77	0.84	0.91	0.97	1.01

TAB. 2.5 – Sur un échantillon de 1000 images de bruit blanc gaussien  $n$  de moyenne nulle et d'écart-type égal à 1, calcul empirique de l'espérance et de l'écart-type pour les normes  $TV$  et  $E$ .

Taille d'image	$16^2$	$32^2$	$64^2$	$128^2$	$256^2$	$512^2$
$E(J(n))$	392	1 670	6 920	28 100	113 000	455 000
$\sqrt{Var(J(n))}$	20	43	90	180	360	690
$E(\ n\ _E)$	2.81	3.59	3.63	3.98	4.30	4.59
$\sqrt{Var(\ n\ _E)}$	0.40	0.34	0.32	0.32	0.28	0.26

peut donc prendre les valeurs du Tableau 2.3 comme de bonnes approximations des normes des bruits blancs gaussiens à moyenne nulle.

Comme on peut le voir sur le Tableau 2.3, il apparaît une très forte corrélation entre la norme  $L^2$  et la norme  $\|\cdot\|_{-1,2}$  de l'image d'un bruit blanc gaussien. Cette constatation confirme les résultats de la sous-section 2.3.4 : pour un bruit blanc gaussien de moyenne nulle, il est équivalent de considérer sa norme  $L^2$  ou sa norme  $\|\cdot\|_{-1,2}$ .

Le Tableau 2.4 confirme les résultats du Tableau 2.1. Pour remplir le Tableau 2.4, pour chaque taille d'image (de  $16 \times 16$  à  $512 \times 512$ ), on a créé 1000 images de bruit blanc gaussien d'écart-type  $\sigma$  égal à 1 (pour normaliser notre expérience). On a alors calculé la norme  $X$  et la norme  $\|\cdot\|_{-1,2}$  pour chaque image. On a pu ainsi calculer la moyenne expérimentale et la variance expérimentale. Les valeurs de  $\frac{E(\|n\|_X)}{E(\|n\|_{-1,2})}$  du Tableau 2.4 correspondent bien à celles de  $\sqrt{C}$  dans le Tableau 2.1, comme prévu par la Proposition 2.3.2.

Par-contre, les écart-types expérimentaux de ces normes n'ont pas le même comportement : l'écart-type de la norme  $X$  reste à peu près constant, alors que l'écart-type de la norme  $\|\cdot\|_{-1,2}$  semble être une fonction croissante de la taille de l'image. Néanmoins, l'écart-type de la norme  $\|\cdot\|_{-1,2}$  augmente moins vite que sa moyenne, et dès que la taille de l'image est assez grande, l'écart-type reste suffisamment petit devant la moyenne (qui peut ainsi être considérée comme une assez bonne estimation de la norme  $\|\cdot\|_{-1,2}$ ).

Le Tableau 2.5 montre les résultats que nous obtenons avec la même expérience, mais cette fois avec la norme  $TV$  et la norme  $E$  (on rappelle que  $J(f) = \|f\|_{TV}$ ).

### 2.5.1 Conclusion

Il ressort de cette étude numérique que la variation totale est bien adaptée pour les images géométriques, et les différentes normes négatives ( $G$ ,  $\|\cdot\|_{-1,2}$ ,  $E$ ) pour les phénomènes oscillants. Nous pouvons également constater que parmi ces dernières, la norme  $G$  paraît plus intéressante pour les images texturées, alors que les normes  $\|\cdot\|_{-1,2}$  et  $E$  semblent plus adaptées aux images de bruit.

A ce stade de notre étude, nous voyons déjà quelles normes il sera intéressant d'utiliser dans un processus de minimisation afin de décomposer une image en trois composantes, une première contenant l'information géométrique, une deuxième l'information texture, et la troisième le bruit éventuel présent dans l'image originale.

Dans ce chapitre, nous avons proposé des méthodes pour calculer ces différentes normes ; nous allons maintenant proposer des algorithmes pour les minimiser.



# Deuxième partie

## Décomposition d'images





# Chapitre 3

## Modèle $u + v$

### 3.1 . Introduction

#### 3.1.1 Préliminaires

La restauration d'images est un enjeu majeur du traitement d'images. Une approche assez récente consiste à considérer qu'une image  $f$  se décompose sous la forme  $u + v$ . La première composante  $u$  est bien structurée et possède une description géométrique simple : elle modélise les objets présents dans l'image. La deuxième composante,  $v$ , contient à la fois les textures et le bruit. Plusieurs modèles ont été proposés (cf [133]).

Le but de ce chapitre est de décrire un algorithme qui sépare une image en deux composantes, la première contenant l'information géométrique, et la seconde l'information oscillante (texture et bruit). Nous utiliserons l'espace  $BV$  pour modéliser la première composante, et l'espace  $G$  pour la deuxième, comme suggéré dans [133] et confirmé par nos expériences numériques du Chapitre 2. Nous introduisons une fonctionnelle originale dont le minimum correspond à la décomposition cherchée. Nous proposons ensuite un algorithme pour minimiser cette fonctionnelle, et nous montrons la convergence de l'algorithme, ainsi que le lien entre notre fonctionnelle et la décomposition proposée par Meyer dans [133]. Enfin, nous illustrons par quelques expériences numériques l'efficacité de notre modèle.

Le plan de ce chapitre est le suivant : dans la Section 3.1, nous commençons par rappeler quelques modèles proposés dans la littérature. Cela nous permet d'introduire notre modèle dans la Section 3.2. Nous proposons un algorithme efficace pour calculer la décomposition cherchée, et nous donnons une preuve de convergence numérique. Nous montrons ensuite des exemples de décomposition d'images dans la Section 3.4, et nous nous intéressons au problème du réglage des paramètres dans la Section 3.5. Nous terminons par une comparaison avec le modèle de Osher-Sole-Vese [143] dans la Section 3.6.

Nous avons présenté notre algorithme de décomposition  $u + v$  de la Section 3.2 ainsi que son étude mathématique dans [24, 25, 26].

#### 3.1.2 Modèle de Meyer

Y. Meyer a analysé dans [133] les modèles de décomposition  $f = u + v$ , et notamment le modèle ROF proposé dans [149] (que nous avons rappelé dans la sous-section 2.1.2). Il montre que ce dernier présente des limites. En particulier, si  $f = \mathbf{1}_\Omega$  où  $\Omega$  est un ouvert borné à bord  $C^\infty$ , alors  $f$  n'est pas conservée par le modèle de Rudin-Osher-Fatemi,  $f$  pouvant même passer complètement dans la composante  $v$ , c'est à dire être considérée comme une

texture et non comme un élément géométrique (contrairement à ce qu'on pourrait espérer d'un tel modèle).

D'une manière plus générale, il remet en cause le choix de la norme  $L^2$  pour capturer la partie oscillante d'une image (ce qui est le cas dans le modèle ROF). En effet, comme le montre par exemple le cas de  $f_n(x) = \cos(nx)$ , une suite de fonctions peut être de plus en plus oscillantes, et rester de norme  $L^2$  constante. C'est pourquoi Y. Meyer a introduit un espace a priori mieux adapté aux phénomènes oscillants, l'espace  $G$  que nous avons présenté dans la Section 2.2. On voit notamment que, grâce au Lemme 2.2.1, une suite de fonctions qui oscillent de plus en plus (ce qui se traduit dans l'énoncé du Lemme 2.2.1 par le fait qu'elle tende vers 0 au sens des distributions) verra sa norme  $G$  également tendre vers 0.

Ainsi dans [133], Y. Meyer propose le modèle de décomposition suivant (comme amélioration du modèle ROF) :

$$\inf_{(u,v) \in BV \times G / f=u+v} (J(u) + \alpha \|v\|_G) \quad (3.1.1)$$

La norme  $L^2$  de la composante oscillante  $v$  du modèle ROF a été remplacée par la norme dans  $G$ . L'espace de Banach  $G$  contient les signaux à fortes oscillations, et donc en particulier les textures et les bruits.

Cependant, dans [133], Y. Meyer ne propose pas de méthode numérique pour résoudre son problème (dont la minimisation n'est d'ailleurs pas triviale). C'est pourquoi plusieurs modèles ont récemment été proposés.

### 3.1.3 Modèle de Vese-Osher

L. Vese et S. Osher ont été les premiers à proposer une approche pour résoudre le problème de Meyer. Pour cela, ils ont étudié le problème (cf [166]) :

$$\inf_{(u,v) \in BV(\Omega) \times G(\Omega)} (J(u) + \lambda \|f - u - v\|_2^2 + \mu \|v\|_{G(\Omega)}) \quad (3.1.2)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné. Pour calculer la solution, ils remplacent le terme  $\|v\|_{G(\Omega)}$  par  $\|\sqrt{g_1^2 + g_2^2}\|_p$  (où  $v = \operatorname{div}(g_1, g_2)$ ), qui approche la norme  $L^\infty$  lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$ . Pour des raisons numériques, les auteurs utilisent la valeur  $p = 1$ , et ils affirment ne pas avoir vu de différences visuelles quand ils ont utilisé des valeurs plus grandes pour  $p$ . Ensuite, ils écrivent formellement les équations d'Euler-Lagrange. Ils montrent de bons résultats numériques (cf Figure 3.8).

Pour faciliter les calculs, il a également été proposé d'utiliser la norme de Sobolev négative  $\|\cdot\|_{-1,2}$  (cf Section 2.3) à la place de la norme  $G$ .

### 3.1.4 Modèle de Osher-Solé-Vese

Dans [143], les auteurs modifient le modèle (3.1.1) en remplaçant  $G$  et la norme  $\|\cdot\|_G$  par  $W^{-1,2} = H^{-1}$ . Cela revient principalement à remplacer la norme du sup de  $g$  dans  $\|\cdot\|_G$  par la norme  $L^2$  de  $g$ .

Le problème considéré est :

$$\inf_u (J(u) + \lambda \|f - u\|_{-1,2}^2) \quad (3.1.3)$$

La solution est obtenue en amenant à l'équilibre l'EDP suivante :

$$u_t = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \left[ \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right] - (u - f) \quad (3.1.4)$$

avec comme condition initiale

$$u(0) = f \quad (3.1.5)$$

Il s'agit d'une EDP du quatrième ordre pour laquelle la discrétisation numérique doit être faite avec très grand soin.

Nous reviendrons sur ce modèle dans la Section 3.6, où on proposera un algorithme original pour le résoudre.

## 3.2 . Notre approche

Les deux approches précédentes n'utilisent pas la norme  $G$  pour la composante oscillante  $v$ , mais une approximation de cette norme, ou une norme relativement proche. Nous avons également constaté dans nos premiers essais d'implémentation une certaine instabilité des schémas numériques. De plus, aucune preuve de convergence des algorithmes n'est donnée dans [166] ou [143]. C'est pourquoi nous avons voulu construire un modèle permettant de résoudre le problème de Meyer en utilisant vraiment la norme  $G$ , donner un algorithme numériquement stable, et montrer mathématiquement sa convergence ainsi que le lien entre notre modèle et le problème d'Y. Meyer.

### 3.2.1 Présentation

On introduit la fonctionnelle suivante définie sur  $X \times X$  :

$$F_{\lambda,\mu}(u, v) = J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \chi_{G_\mu}(v) \quad (3.2.1)$$

On rappelle que  $G_\mu$  est donné par :

$$G_\mu = \{v \in G \mid \|v\|_G \leq \mu\} \quad (3.2.2)$$

Comme  $J^*$  est la fonction indicatrice de  $G_1$ , on peut réécrire (3.2.1) comme :

$$F_{\lambda,\mu}(u, v) = \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|_X^2 + J(u) + J^*\left(\frac{v}{\mu}\right) \quad (3.2.3)$$

Avec cette formulation, on voit bien les rôles symétriques joués par  $u$  et  $v$ .

Le paramètre  $\mu$  joue le même rôle que dans le problème (3.1.2). On précisera le lien de notre modèle avec celui de Meyer (3.1.1) plus loin (on l'obtiendra en faisant  $\lambda \rightarrow 0$ ).

Le problème que l'on veut résoudre est :

$$\inf_{(u,v) \in X \times X} F_{\lambda,\mu}(u, v) \quad (3.2.4)$$

Pour cela, nous résolvons les deux problèmes suivants :

– A  $v$  fixé, on cherche

$$\inf_{u \in BV} \left( J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|_2^2 \right) \quad (3.2.5)$$

– A  $u$  fixé

$$\inf_{v \in G_\mu} \|f - u - v\|_2^2 \quad (3.2.6)$$

On sait (Proposition 2.1.1) que la solution de (3.2.5) est donnée par :

$$\hat{u} = f - v - P_{G_\lambda}(f - v) \quad (3.2.7)$$

Et la solution de (3.2.6) est simplement donnée par :

$$\hat{v} = P_{G_\mu}(f - u) \quad (3.2.8)$$

### 3.2.2 Algorithme

Pour résoudre le problème (3.2.4), nous résolvons les problèmes (3.2.5) et (3.2.6) de manière alternée.

1. Initialisation :

$$u_0 = v_0 = 0 \quad (3.2.9)$$

2. Itérations :

$$v_{n+1} = P_{G_\mu}(f - u_n) \quad (3.2.10)$$

$$u_{n+1} = f - v_{n+1} - P_{G_\lambda}(f - v_{n+1}) \quad (3.2.11)$$

3. Test d'arrêt : On arrête lorsque

$$\max(|u_{n+1} - u_n|, |v_{n+1} - v_n|) \leq \epsilon \quad (3.2.12)$$

### 3.2.3 Commentaires sur l'algorithme

Le choix de minimiser d'abord par rapport à  $v$  puis par rapport à  $u$  n'est pas anodin. De plus, comme nous le verrons plus loin, le paramètre  $\lambda$  doit être proche de 0 pour que notre problème corresponde bien à celui de Meyer. Lorsque nous fixons les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ , nous les choisissons en particulier de sorte que  $\lambda < \mu$  et même  $\lambda \ll \mu$ .

Considérons alors l'algorithme :

1. Initialisation :

$$u_0 = v_0 = 0 \quad (3.2.13)$$

2. Itérations :

$$u_{n+1} = f - v_n - P_{G_\lambda}(f - v_n) \quad (3.2.14)$$

$$v_{n+1} = P_{G_\mu}(f - u_{n+1}) \quad (3.2.15)$$

3. Test d'arrêt : On arrête lorsque

$$\max(|u_{n+1} - u_n|, |v_{n+1} - v_n|) \leq \epsilon \quad (3.2.16)$$

Cet algorithme est presque le même que celui que nous utilisons, à la différence que l'on commence par minimiser par rapport à  $u$  avant de minimiser par rapport à  $v$ .

**Lemme 3.2.1.** *Supposons  $(n+1)\lambda \leq \mu$  et  $\|v_n\|_G \leq n\lambda$ . Alors on a :*

$$\|v_{n+1}\|_G \leq (n+1)\lambda \quad (3.2.17)$$

**Preuve :** Il suffit de remarquer que :

$$v_{n+1} = P_{G_\mu}(f - u_{n+1}) = P_{G_\mu}(v_n + P_{G_\lambda}(f - v_n)) = v_n + P_{G_\lambda}(f - v_n). \quad (3.2.18)$$

■

Supposons que la solution cherchée soit  $(u, v)$ . Pour que la solution du problème (3.2.4) corresponde à celle du problème (3.1.1), on doit choisir  $\mu$  de sorte que  $\|v\|_G \leq \mu$  (on précisera ce point dans la Section 3.3). Donc si  $k\lambda \leq \|v\|_G < (k+1)\lambda$ , on ne peut pas espérer que l'algorithme converge avant l'itération  $k+1$  (où une itération correspond au passage de  $(u_n, v_n)$  à  $(u_{n+1}, v_{n+1})$ ). En effet, comme  $v_0 = 0$  on voit, d'après le Lemme 3.2.1, que si  $n \leq k$  alors

$$\|v_n\|_G \leq n\lambda \leq k\lambda < \underbrace{\mu}_{=\|v\|_G} \quad (3.2.19)$$

Et dans le cas où  $\lambda \ll \|v\|_G$  (ce qui est le cas en pratique), alors on a  $n \gg 1$ .

C'est pour ne pas avoir cette borne inférieure pour le temps de convergence que dans notre algorithme nous avons décidé de minimiser d'abord par rapport à  $v$  puis par rapport à  $u$ . Expérimentalement, nous avons vérifié que notre choix est bien le plus rapide.

### 3.3 . Résultats mathématiques

Nous avons introduit un algorithme qui intuitivement a toutes les chances de minimiser la fonctionnelle (3.2.4). Dans cette section, on va prouver que cet algorithme fait bien ce qu'on attend de lui : d'une part qu'il converge, et d'autre part qu'il converge vers un minimiseur de (3.2.4).

On commence par montrer la convergence à  $\lambda$  fixé. On précise ensuite le lien entre notre problème limite (lorsque  $\lambda$  tend vers 0) et le problème de Meyer.

#### 3.3.1 Convergence de l'algorithme (3.2.9)–(3.2.12)

On étudie d'abord si le problème (3.2.4) est bien posé. C'est l'objet du lemme suivant :

**Lemme 3.3.1.** *Il existe un unique couple  $(u, v) \in X \times G_\mu$  réalisant l'infimum de  $F_{\lambda, \mu}$  sur  $X \times X$ .*

**Preuve :** On sépare la preuve en deux parties.

Étape 1 : Existence

1. On commence par remarquer que l'ensemble  $X \times G_\mu$  est convexe, et que  $F_{\lambda, \mu}$  est convexe sci sur  $X \times G_\mu$ . On en déduit que  $F_{\lambda, \mu}$  est convexe sci sur  $X \times X$ .
2. Soit  $(u, v) \in X \times G_\mu$ , alors  $\|v\|_G \leq \mu$ . De plus, puisque  $X$  est de dimension finie, il existe  $g \in X$  tel que  $v = \operatorname{div}(g)$  et  $\|g\|_{L^\infty} = \|v\|_G \leq \mu$ . On déduit de (2.1.15) que ( $N^2$  est la taille de l'image) :

$$\|v\|_X \leq 4\mu N^2 \quad (3.3.1)$$

On rappelle que  $X \times X$  est muni de la norme euclidienne  $\|(u, v)\|_{X \times X} = \sqrt{\|u\|_X^2 + \|v\|_X^2}$ . Donc, si  $\|(u, v)\|_{X \times X} \rightarrow +\infty$ , alors on obtient de (3.3.1) que  $\|u\|_X \rightarrow +\infty$ . On déduit donc, puisque  $f$  est fixée, et avec (3.3.1), que

$$\|f - u - v\|_X^2 \rightarrow +\infty \quad (3.3.2)$$

Et comme  $F_{\lambda,\mu}(u, v) \geq \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|_2^2$ , on obtient  $F_{\lambda,\mu}(u, v) \rightarrow +\infty$ . On conclut que  $F_{\lambda,\mu}$  est coercive sur  $X \times G_\mu$ , et donc sur  $X \times X$ .

On en déduit l'existence d'un minimiseur  $(\hat{u}, \hat{v})$ .

#### Etape 2 : Unicité

Pour obtenir l'unicité, on commence par remarquer que  $F_{\lambda,\mu}$  est strictement convexe sur  $X \times G_\mu$ , comme somme d'une fonction convexe et d'une fonction strictement convexe, sauf dans la direction  $(u, -u)$ . Il suffit donc de vérifier que si  $(\hat{u}, \hat{v})$  est un minimiseur de  $F_{\lambda,\mu}$ , alors pour  $t \neq 0$ ,  $(\hat{u} + t\hat{u}, \hat{v} - t\hat{u})$  n'est pas un minimiseur de  $F_{\lambda,\mu}$ . Comme  $F_{\lambda,\mu}$  est convexe, on peut se restreindre au cas  $|t| < 1$ .

Le résultat est évident si  $\hat{v} - t\hat{u} \in X \setminus G_\mu$ . Montrons maintenant que si  $\hat{v} - t\hat{u} \in G_\mu$ , alors le résultat reste vrai. En effet, si  $\hat{v} - t\hat{u} \in G_\mu$ , on a :

$$F_{\lambda,\mu}(\hat{u} + t\hat{u}, \hat{v} - t\hat{u}) = F_{\lambda,\mu}(\hat{u}, \hat{v}) + tJ(\hat{u}) \quad (3.3.3)$$

Par l'absurde, on suppose qu'il existe  $\hat{t} \neq 0$  tel que  $\hat{v} - \hat{t}\hat{u} \in G_\mu$  et

$$F_{\lambda,\mu}(\hat{u} + \hat{t}\hat{u}, \hat{v} - \hat{t}\hat{u}) \leq F_{\lambda,\mu}(\hat{u}, \hat{v}) \quad (3.3.4)$$

Comme  $(\hat{u}, \hat{v})$  minimise  $F_{\lambda,\mu}$ , (3.3.4) est une inégalité. De (3.3.3), on déduit alors que  $J(\hat{u}) = 0$  (car  $\hat{t} \neq 0$ ). Il existe donc  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $(i, j)$ ,  $\hat{u}_{i,j} = \gamma$ .

1. Si  $\gamma = 0$ , alors  $\hat{u} = 0$ . Donc  $(\hat{u} + \hat{t}\hat{u}, \hat{v} - \hat{t}\hat{u}) = (\hat{u}, \hat{v})$ .
2. Si  $\gamma \neq 0$ , alors  $\hat{v} - \hat{t}\hat{u}$  ne peut pas appartenir à  $G_\mu$  car sa moyenne n'est pas nulle (cf Proposition 2.2.2). Cela contredit notre hypothèse.

■

### Convergence numérique de l'algorithme

Nous montrons ici que notre algorithme donne de manière asymptotique la solution du problème (3.2.3).

**Proposition 3.3.1.** *La suite  $(u_n, v_n)$  construite dans la sous-section 3.2.2 converge vers  $(\hat{u}, \hat{v})$  unique minimiseur de  $F_{\lambda,\mu}$  sur  $X \times X$ .*

**Preuve :** Commençons par remarquer que, comme nous résolvons des problèmes de minimisations successives, nous avons :

$$F_{\lambda,\mu}(u_n, v_n) \geq F_{\lambda,\mu}(u_n, v_{n+1}) \geq F_{\lambda,\mu}(u_{n+1}, v_{n+1}) \quad (3.3.5)$$

En particulier, la suite  $F_{\lambda,\mu}(u_n, v_n)$  est décroissante. Comme elle est bornée par 0, elle converge donc dans  $\mathbb{R}$ . Notons  $m$  sa limite. On veut montrer que

$$m = \inf_{(u,v) \in X \times X} F_{\lambda,\mu}(u, v) \quad (3.3.6)$$

On peut supposer sans restriction que,  $\forall n$ ,  $(u_n, v_n) \in X \times G_\mu$ .

Comme  $F_{\lambda,\mu}$  est coercive et que la suite  $F_{\lambda,\mu}(u_n, v_n)$  est convergente, on en déduit que la suite  $(u_n, v_n)$  est bornée dans  $X \times G_\mu$ .

On peut donc extraire une sous-suite  $(u_{n_k}, v_{n_k})$  qui converge vers  $(\hat{u}, \hat{v})$  quand  $n_k \rightarrow +\infty$ , avec  $(\hat{u}, \hat{v}) \in X \times G_\mu$ . De plus, on a, pour tout  $n_k \in \mathbb{N}$  et tout  $v$  dans  $X$  :

$$F_{\lambda,\mu}(u_{n_k}, v_{n_k+1}) \leq F_{\lambda,\mu}(u_{n_k}, v) \quad (3.3.7)$$

et pour tout  $n_k \in \mathbb{N}$  et tout  $u$  dans  $X$  :

$$F_{\lambda,\mu}(u_{n_k}, v_{n_k}) \leq F_{\lambda,\mu}(u, v_{n_k}) \quad (3.3.8)$$

On note  $\tilde{v}$  une valeur d'adhérence de la suite  $(v_{n_k+1})$ . En considérant (3.3.5), on obtient (puisque  $F_{\lambda,\mu}$  est continue sur  $X \times G_\mu$ ) :

$$m = F_{\lambda,\mu}(\hat{u}, \hat{v}) = F_{\lambda,\mu}(\hat{u}, \tilde{v}) \quad (3.3.9)$$

En passant à la limite dans (3.2.10), on a :  $\tilde{v} = P_{G_\mu}(f - \hat{u})$ . Mais avec (3.3.9), on sait que :  $\|f - \hat{u} - \hat{v}\| = \|f - \hat{u} - \tilde{v}\|$ . Par unicité de la projection, on conclut que  $\tilde{v} = \hat{v}$ . D'où  $v_{n_k+1} \rightarrow \hat{v}$ . En passant à la limite dans (3.3.7) ( $F_{\lambda,\mu}$  est continue sur  $X \times G_\mu$ ), on a  $\forall v$  :

$$F_{\lambda,\mu}(\hat{u}, \hat{v}) \leq F(\hat{u}, v) \quad (3.3.10)$$

Et en passant à la limite dans (3.3.8) on a  $\forall u$  :

$$F_{\lambda,\mu}(\hat{u}, \hat{v}) \leq F(u, \hat{v}) \quad (3.3.11)$$

(3.3.10) peut encore se réécrire :

$$F_{\lambda,\mu}(\hat{u}, \hat{v}) = \inf_{v \in X} F(\hat{u}, v) \quad (3.3.12)$$

ainsi que (3.3.11) :

$$F_{\lambda,\mu}(\hat{u}, \hat{v}) = \inf_{u \in X} F(u, \hat{v}) \quad (3.3.13)$$

Or, d'après la définition de  $F_{\lambda,\mu}(u, v)$  (3.2.3), (3.3.12) est équivalent à :

$$0 \in -f + \hat{u} + \hat{v} + \lambda \partial J(\hat{u}) \quad (3.3.14)$$

et (3.3.13) à :

$$0 \in -f + \hat{u} + \hat{v} + \lambda \partial J^* \left( \frac{\hat{v}}{\mu} \right) \quad (3.3.15)$$

Le sous-différentiel de  $F_{\lambda,\mu}$  en  $(\hat{u}, \hat{v})$  est donné par :

$$\partial F_{\lambda,\mu}(\hat{u}, \hat{v}) = \frac{1}{\lambda} \left( \begin{array}{c} -f + \hat{u} + \hat{v} + \lambda \partial J(\hat{u}) \\ -f + \hat{u} + \hat{v} + \lambda \partial J^* \left( \frac{\hat{v}}{\mu} \right) \end{array} \right) \quad (3.3.16)$$

Et donc d'après (3.3.14) et (3.3.15), on a :

$$\left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) \in \partial F_{\lambda,\mu}(\hat{u}, \hat{v}) \quad (3.3.17)$$

ce qui est équivalent à :

$$F_{\lambda,\mu}(\hat{u}, \hat{v}) = \inf_{(u,v) \in X^2} F_{\lambda,\mu}(u, v) = m \quad (3.3.18)$$

Donc toute la suite  $F_{\lambda,\mu}(u_n, v_n)$  converge vers  $m$  unique minimum de  $F$  sur  $X \times X_\mu$ . On en déduit que toute la suite  $(u_n, v_n)$  converge vers  $(\hat{u}, \hat{v})$  point réalisant le minimum de  $F_{\lambda,\mu}$ , quand  $n$  tends vers  $+\infty$ . ■

On a donc montré qu'effectivement notre algorithme converge, et qu'en plus il converge vers le minimiseur de (3.2.4). Il nous faut maintenant établir le lien entre (3.2.4) et le problème de Meyer (3.1.1).



**Remarque :** Il n'est pas vrai en général que pour  $F$  strictement convexe, les deux propriétés

$$F(\hat{u}, \hat{v}) \leq F(\hat{u}, v) \quad \forall v$$

$$F(\hat{u}, \hat{v}) \leq F(u, \hat{v}) \quad \forall u$$

impliquent

$$F(\hat{u}, \hat{v}) \leq F(u, v) \quad \forall u, v$$

En effet, [97] donne un contre-exemple avec la fonction :

$$F(u, v) = |u - v| + \frac{1}{2}(u + 1)^2 + \frac{1}{2}(v + 1)^2 \quad (3.3.19)$$

Il est immédiat de constater que  $(-1, -1)$  est le point de minimum global de  $F$ , et que  $(0, 0)$  est un point de minimum de  $u \mapsto F(u, 0)$  et  $v \mapsto F(0, v)$ .

### 3.3.2 Etude du problème limite lorsque $\lambda \rightarrow 0$

On veut examiner le lien entre le modèle discret (3.2.3) et le problème d'Y. Meyer (3.1.1). On commence par rappeler la version discrète du problème de Meyer.

$$\inf_{(u,v) \in X \times G / f=u+v} H_\alpha(u, v) \quad (3.3.20)$$

avec

$$H_\alpha(u, v) = (J(u) + \alpha \|v\|_G) \quad (3.3.21)$$

Le résultat suivant est immédiat :

**Lemme 3.3.2.** *Il existe une solution  $(\hat{u}, \hat{v}) \in X \times G$  du problème (3.3.20).*

**Preuve :** (3.3.20) est équivalent à  $\inf_{v \in G} H_\alpha(f - v, v)$ . Il est immédiat de vérifier que  $H_\alpha$  est convexe, coercive et continue sur  $G$ . Il existe donc  $\hat{v} \in G$  tel que

$$H_\alpha(f - \hat{v}, \hat{v}) = \inf_{v \in G} H_\alpha(f - v, v) \quad (3.3.22)$$

On note  $\hat{u} = f - \hat{v}$ . Alors  $(\hat{u}, \hat{v})$  est une solution de (3.3.20).

■

**Remarque :** La question de l'unicité reste un problème ouvert pour (3.3.20).

On rappelle maintenant le problème (3.2.4) :

$$\inf_{(u,v) \in X \times X} F_{\lambda,\mu}(u, v) \quad (3.3.23)$$

avec

$$F_{\lambda,\mu}(u, v) = \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|^2 + J(u) + J^* \left( \frac{v}{\mu} \right) \quad (3.3.24)$$

On considère ensuite le problème

$$\inf_{(u,v) \in X \times X / f=u+v} J(u) + J^* \left( \frac{v}{\mu} \right) \quad (3.3.25)$$

On montre facilement le résultat suivant :

**Lemme 3.3.3.** *Il existe  $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in X \times X$  solution de (3.3.25).*

**Preuve :** (3.3.25) est équivalent à

$$\inf_{v \in X} J(f - v) + J^* \left( \frac{v}{\mu} \right) \quad (3.3.26)$$

Il est immédiat de voir que la fonction à minimiser dans (3.3.26) est convexe, coercive et semi-continue inférieurement sur  $X$ . Il existe donc  $\tilde{v} \in X$  tel que

$$J(f - \tilde{v}) + J^* \left( \frac{\tilde{v}}{\mu} \right) = \inf_{v \in X} J(f - v) + J^* \left( \frac{v}{\mu} \right) \quad (3.3.27)$$

On note  $\tilde{u} = f - \tilde{v}$ . Alors  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  est solution de (3.3.25). ■

La proposition suivante montre que le problème (3.3.25) est obtenu en passant à la limite  $\lambda \rightarrow 0^+$  dans (3.3.23).

**Proposition 3.3.2.** *On suppose que le problème (3.3.25) possède une unique solution  $(\hat{u}, \hat{v})$ . On note  $(u_\lambda, v_\lambda)$  la solution du problème (3.3.23). Alors  $(u_\lambda, v_\lambda)$  converge vers  $(\hat{u}, \hat{v})$  lorsque  $\lambda$  tend vers 0.*

**Remarque :** Dans le cas où la solution du problème (3.3.25) n'est pas unique, le résultat de la Proposition 3.3.2 n'est plus vrai. On peut juste montrer que toute valeur d'adhérence de  $(u_\lambda, v_\lambda)$  est une solution du problème (3.3.25).

**Preuve de la Proposition 3.3.2 :** L'existence de  $(\hat{u}, \hat{v})$  est donnée par le Lemme 3.3.3. L'existence et l'unicité de  $(u_\lambda, v_\lambda)$  est donnée par le Lemme 3.3.1.

Comme  $(u_\lambda, v_\lambda)$  est la solution du problème (3.3.23), on a  $v_\lambda \in G_\mu$ , i.e.  $\|v_\lambda\|_G \leq \mu$ . Comme il a été montré dans la preuve du Lemme 3.3.1, cette inégalité implique :

$$\|v_\lambda\|_X \leq 4\mu N^2 \quad (3.3.28)$$

De plus, puisque  $(u_\lambda, v_\lambda)$  est la solution du problème (3.3.23), on a :

$$F_{\lambda,\mu}(u_\lambda, v_\lambda) \leq F_{\lambda,\mu}(f, 0) \quad (3.3.29)$$

ce qui entraîne

$$F_{\lambda,\mu}(u_\lambda, v_\lambda) \leq J(f) \quad (3.3.30)$$

Le terme de gauche de (3.3.30) est donné par :

$$F_{\lambda,\mu}(u_\lambda, v_\lambda) = J(u_\lambda) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u_\lambda - v_\lambda\|_X^2 + J^* \left( \frac{v_\lambda}{\mu} \right) = J(u_\lambda) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u_\lambda - v_\lambda\|_X^2 \quad (3.3.31)$$

D'où  $J(u_\lambda) + \frac{1}{2\lambda}\|f - u_\lambda - v_\lambda\|_X^2 \leq J(f)$ , et

$$\|f - u_\lambda - v_\lambda\|^2 \leq 2\lambda J(f) \quad (3.3.32)$$

La norme  $\|v_\lambda\|_X$  étant bornée (d'après (3.3.28)), on conclut que si  $\lambda \in [0; 1]$ , alors  $u_\lambda$  est bornée par une constante  $C > 0$  qui ne dépend pas de  $\lambda$ .

Considérons une suite  $(\lambda_n)$  qui tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Alors, à une extraction près (car  $(u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n})$  est borné dans  $X \times X$ ), il existe  $(u_0, v_0) \in X \times X$  tel que  $(u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n})$  converge vers  $(u_0, v_0)$ . En passant à la limite dans (3.3.32), on obtient :  $\|f - u_0 - v_0\|_X = 0$ , i.e.  $f = u_0 + v_0$ .

Pour conclure la preuve de la proposition, il reste à montrer que  $(u_0, v_0)$  est solution du problème (3.3.25). On commence par remarquer que puisque  $\forall \lambda > 0$ ,  $\|v_\lambda\|_G \leq \mu$ , on a :  $\|v_0\|_G \leq \mu$ . Soit  $(u, v) \in X \times X$  tel que  $f = u + v$ . On a :

$$\begin{aligned} & J(u) + J^*\left(\frac{v}{\mu}\right) + \underbrace{\frac{1}{2\lambda}\|f - u - v\|^2}_{=0} \\ & \geq J(u_{\lambda_n}) + J^*\left(\frac{v_{\lambda_n}}{\mu}\right) + \frac{1}{2\lambda_n}\|f - u_{\lambda_n} - v_{\lambda_n}\|^2 \\ & \geq \underbrace{J(u_{\lambda_n}) + J^*\left(\frac{v_{\lambda_n}}{\mu}\right)}_{\rightarrow J(u_0) + J^*\left(\frac{v_0}{\mu}\right)} \end{aligned}$$

Donc  $(u_0, v_0)$  est solution du problème (3.3.25). Et comme on a supposé que le problème (3.3.25) possède une unique solution, on conclut que  $(u_0, v_0) = (\hat{u}, \hat{v})$ , i.e.  $(u_0, v_0)$  est la solution du problème (3.3.25). ■

### 3.3.3 Lien entre le problème limite et le problème de Meyer

Pour montrer que résoudre notre problème (3.3.23) permet bien de résoudre le problème de Meyer (3.3.20), il nous reste à montrer le lien entre notre problème limite (3.3.25) et le problème de Meyer (3.3.20).

**Proposition 3.3.3.** *On fixe  $\alpha > 0$  dans le problème (3.3.20). Soit  $(\hat{u}, \hat{v})$  une solution du problème (3.3.20). On fixe  $\mu = \|\hat{v}\|_G$  dans (3.3.25). Alors :*

- *$(\hat{u}, \hat{v})$  est aussi solution du problème (3.3.25).*
- *Réciproquement, toute solution  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  de (3.3.25) (avec  $\mu = \|\hat{v}\|_G$ ) est une solution de (3.3.20).*

**Preuve :** On coupe la preuve en deux parties.

Etape 1 :

On commence par montrer que  $(\hat{u}, \hat{v})$  est une solution de (3.3.25) (avec  $\mu = \|\hat{v}\|_G$ ). Comme  $(\hat{u}, \hat{v})$  est solution de (3.3.20) (l'existence de  $(\hat{u}, \hat{v})$  est donnée par le Lemme 3.3.2) et comme  $\|\hat{v}\|_G = \mu$ , alors  $\hat{u}$  est solution de

$$\inf_{u \in X / u = f - v, \|v\|_G = \mu} J(u) + \alpha \mu \quad (3.3.33)$$

i.e.  $\hat{u}$  est solution de

$$\inf_{u \in X/u=f-v, \|v\|_G=\mu} J(u) \quad (3.3.34)$$

L'ensemble  $\{u \in X/u = f - v, \|v\|_G = \mu\}$  étant contenu dans  $\{u \in X/u = f - v, \|v\|_G \leq \mu\}$ , on a :

$$\inf_{u \in X/u=f-v, \|v\|_G=\mu} J(u) \geq \inf_{u \in X/u=f-v, \|v\|_G \leq \mu} J(u) \quad (3.3.35)$$

Par l'absurde, on suppose que

$$\inf_{u \in X/u=f-v, \|v\|_G=\mu} J(u) > \inf_{u \in X/u=f-v, \|v\|_G \leq \mu} J(u) \quad (3.3.36)$$

Il existe donc  $v' \in X$  tel que  $\|v'\|_G < \mu$  et

$$J(f - v') < \inf_{u \in X/u=f-v, \|v\|_G=\mu} J(u) \quad (3.3.37)$$

On note  $u' = f - v'$ , et on obtient :  $J(u') + \alpha\|v'\|_G < J(u') + \alpha\mu$ . Mais comme  $(\hat{u}, \hat{v})$  est solution de (3.3.20) :

$$J(\hat{u}) + \alpha\|\hat{v}\|_G \leq J(u') + \alpha\|v'\|_G < J(u') + \alpha\mu \quad (3.3.38)$$

D'où (on rappelle que  $\|\hat{v}\|_G = \mu$ ), on tire de (3.3.38) que  $J(\hat{u}) < J(u')$ . Cela contredit (3.3.37). On conclut que (3.3.36) ne peut pas être vrai. D'où :

$$\inf_{u \in X/u=f-v, \|v\|_G=\mu} J(u) = \inf_{u \in X/u=f-v, \|v\|_G \leq \mu} J(u) \quad (3.3.39)$$

Avec (3.3.34),  $\hat{u}$  est solution de  $\inf_{u \in X/u=f-v, \|v\|_G \leq \mu} J(u)$ , i.e.  $\hat{u}$  est solution de

$$\inf_{u \in X/u=f-v} J(u) + J^*\left(\frac{v}{\mu}\right) \quad (3.3.40)$$

Donc  $(\hat{u}, \hat{v})$  est aussi solution de (3.3.25).

Etape 2 :

On considère maintenant  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  une solution de (3.3.25) (l'existence de  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  est donnée par le Lemme 3.3.3). On peut répéter les calculs de l'Etape 1. On obtient que  $\tilde{u}$  est solution de :

$$\inf_{u \in X/u=f-v, \|v\|_G=\mu} J(u) + \alpha\mu \quad (3.3.41)$$

On a donc :  $J(\tilde{u}) + \alpha\mu = J(\hat{u}) + \alpha\|\hat{v}\|_G$ . Mais comme  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  est solution de (3.3.25), on a  $\|\tilde{v}\|_G \leq \mu$ . D'où  $J(\tilde{u}) + \alpha\|\tilde{v}\|_G \leq J(\hat{u}) + \alpha\|\hat{v}\|_G$ . Et comme  $(\hat{u}, \hat{v})$  est solution de (3.3.20), on obtient que :

$$J(\tilde{u}) + \alpha\|\tilde{v}\|_G = J(\hat{u}) + \alpha\|\hat{v}\|_G \quad (3.3.42)$$

On conclut donc que  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  est solution de (3.3.20).

■

En fait, on peut dire plus sur le lien entre le problème de Meyer (3.3.20) et notre problème limite (3.3.25). Nous allons donner avec le Corollaire 3.3.1 une sorte de réciproque à la Proposition 3.3.3.  $\alpha$  étant fixé, on note

$$Z_\alpha = \{v_\alpha, v_\alpha \text{ est solution du problème } \inf_{v \in G} H_\alpha(f - v, v) \text{ (cf (3.3.20))} \} \quad (3.3.43)$$

$$S_\alpha = \{\|v_\alpha\|_G, v_\alpha \text{ est solution du problème } \inf_{v \in G} H_\alpha(f - v, v) \text{ (cf (3.3.20))} \} \quad (3.3.44)$$

On sait que  $Z_\alpha$  et  $S_\alpha$  ne sont pas vides d'après le Lemme 3.3.2. On considère les deux multi-applications suivantes :

$$\begin{aligned} Y : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{P}(G) \\ \alpha &\mapsto Z_\alpha \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+) \\ \alpha &\mapsto S_\alpha \end{aligned}$$

où  $\mathbb{P}(G)$  (resp.  $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+)$ ) désigne l'ensemble des parties de  $G$  (resp.  $\mathbb{R}_+$ ).

On veut montrer une sorte de réciproque à la Proposition 3.3.3, i.e. que, pour certaines valeurs de  $\mu$ , il existe  $\alpha$  tel que  $\mu \in T(\alpha)$ .

On a le résultat suivant :

**Proposition 3.3.4.**

1.  $T$  est une multi-application décroissante.
2.  $Y(0) = \{f - \bar{f}\}$  et  $T(0) = \|f - \bar{f}\|_G$  (où  $\bar{f}$  désigne la moyenne de  $f$  sur  $\Omega$ ).
3. Si  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ , alors  $Y(v_\alpha)$  (resp.  $T(v_\alpha)$ ) tend vers  $\{0\}$  (resp.  $\{0\}$ ) (au sens de la métrique de Hausdorff).

**Preuve :** On montre successivement les trois points de la proposition. Si on prend  $v_\alpha$  dans  $Z_\alpha$ , on note  $u_\alpha = f - v_\alpha$ .

1. Soit  $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$ . On prend  $v_{\alpha_1}$  dans  $Z_{\alpha_1}$  et  $v_{\alpha_2}$  dans  $Z_{\alpha_2}$ . On note  $u_{\alpha_1} = f - v_{\alpha_1}$  et  $u_{\alpha_2} = f - v_{\alpha_2}$ . Alors, comme  $v_{\alpha_1}$  est dans  $Z_{\alpha_1}$ , on a en particulier :

$$J(u_{\alpha_1}) + \alpha_1 \|v_{\alpha_1}\|_G \leq J(u_{\alpha_2}) + \alpha_1 \|v_{\alpha_2}\|_G \quad (3.3.45)$$

Et comme  $v_{\alpha_2}$  est dans  $Z_{\alpha_2}$ , on a aussi :

$$J(u_{\alpha_2}) + \alpha_2 \|v_{\alpha_2}\|_G \leq J(u_{\alpha_1}) + \alpha_2 \|v_{\alpha_1}\|_G \quad (3.3.46)$$

En ajoutant les deux dernières inégalités, on obtient :

$$\alpha_1 \|v_{\alpha_1}\|_G + \alpha_2 \|v_{\alpha_2}\|_G \leq \alpha_1 \|v_{\alpha_2}\|_G + \alpha_2 \|v_{\alpha_1}\|_G \quad (3.3.47)$$

Et alors

$$\underbrace{(\alpha_2 - \alpha_1)}_{>0 \text{ par hypothèse}} (\|v_{\alpha_2}\|_G - \|v_{\alpha_1}\|_G) \leq 0 \quad (3.3.48)$$

D'où  $\|v_{\alpha_2}\|_G \leq \|v_{\alpha_1}\|_G$ , ce qui prouve le premier point de la proposition.

2. Montrons maintenant le deuxième point de la proposition. On a (cf (3.3.21))  $H_0(f - v, v) = J(f - v) \geq 0$  pour tout  $v \in G$ . On choisit  $v_0 = f - \bar{f}$  ( $v_0 \in G$  car  $\bar{v}_0 = 0$ ), et on obtient  $H_0(f - v_0, v_0) = J(f - v_0) = J(\bar{f}) = 0$ . D'où  $0 = \min_{v \in G} H_0(f - v, v)$ . On déduit que  $v_0 \in Z_0$ . De plus,  $J(u) = 0$  si et seulement si  $u = \bar{u}$ . Soit  $v_1$  une solution de  $\min_{v \in G} H_0(f - v, v)$ . On a donc  $\overline{f - v_1} = f - v_1$ . Et comme  $v_1 \in G$ , on aussi  $\bar{v}_1 = 0$ . Alors  $f - v_1 = \overline{f - v_1} = \bar{f} - \bar{v}_1 = \bar{f}$ , i.e.  $v_1 = v_0$ . On conclut que  $\{v_0\} = Z_0$ . Cela prouve le deuxième point de la proposition.
3. Montrons maintenant le troisième point de la proposition. On prend  $v_\alpha$  dans  $Z_\alpha$ , et on note  $u_\alpha = f - v_\alpha$ . Par définition de  $Z_\alpha$ , on a pour tout  $(u, v) \in X \times G$  tel que  $f = u + v$  :

$$J(u_\alpha) + \alpha \|v_\alpha\|_G \leq J(u) + \alpha \|v\|_G \quad (3.3.49)$$

On choisit  $u = f$ , et  $v = 0$ . On obtient :

$$J(u_\alpha) + \alpha \|v_\alpha\|_G \leq J(f) \quad (3.3.50)$$

- Premier cas : si  $f$  est constante (i.e  $f = \bar{f}$ ), alors  $J(f) = 0$ . Donc (3.3.50) implique que  $J(u_\alpha) = \|v_\alpha\|_G = 0$ . On conclut que  $v_\alpha = 0$ , et  $u_\alpha = \bar{f} = f$ .
- Second cas : si maintenant  $f$  n'est pas constante (i.e.  $f \neq \bar{f}$ ), alors  $J(f) > 0$ . Donc (3.3.50) implique que  $\|v_\alpha\|_G \leq \frac{J(f)}{\alpha}$ . Ainsi  $Y(\alpha) \rightarrow \{0\}$  lorsque  $\alpha$  tend vers  $+\infty$  (au sens de la métrique de Hausdorff).

■

**Remarque :** En fait, on a montré que  $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \|f - \bar{f}\|_G]$ . En particulier, les valeurs de  $T$  sont uniformément bornées :

1.  $T(0) = \{f - \bar{f}\}$
2. Si  $\alpha > 0$ , alors si  $v_\alpha \in T(\alpha)$ , on a

$$\|v_\alpha\|_G \leq \|f - \bar{f}\|_G \quad (3.3.51)$$

**Proposition 3.3.5.** *T est semi-continu supérieurement (scs) (i.e T est de graphe fermé, à valeurs convexes compactes).*

**Preuve :** On sépare la preuve en deux parties :

Etape 1 :

On fixe  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ . Par définition de  $S_\alpha$ , on vérifie facilement que  $T(\alpha)$  est convexe et fermé dans  $\mathbb{R}$ . De plus on a montré que  $T(\alpha)$  est uniformément borné (cf (3.3.51)).  $T(\alpha)$  est donc compact dans  $\mathbb{R}$ .

Etape 2 :

On considère maintenant une suite  $(\alpha_n, v_{\alpha_n})$  où  $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$  et  $v_{\alpha_n} \in Z_{\alpha_n}$ . On suppose qu'il existe  $(\alpha_0, v_0)$  dans  $\mathbb{R}_+ \times G$  tel que  $(\alpha_n, v_{\alpha_n}) \rightarrow (\alpha_0, v_0)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Comme  $v_{\alpha_n}$  est dans  $Z_{\alpha_n}$ , on a pour tout  $(u, v) \in X \times G$  tel que  $f = u + v$  :

$$J(f - v_{\alpha_n}) + \alpha_n \|v_{\alpha_n}\|_G \leq J(u) + \alpha_0 \|v\|_G \quad (3.3.52)$$

En passant à la limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient :

$$J(f - v_0) + \alpha_0 \|v_0\|_G \leq J(u) + \alpha_0 \|v\|_G \quad (3.3.53)$$

D'où  $v_0$  appartient à  $Z_{\alpha_0}$ , et  $\|v_0\|_G$  est donc dans  $S_{\alpha_0}$ . Cela montre que le graphe de  $T$  est fermé.

■

**Corollaire 3.3.1.** *Pour tout  $\mu$  dans  $(0, \|f - \bar{f}\|_G)$ , on peut trouver  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}_+$  tel qu'il existe  $(u, v)$  dans  $X \times G$  avec  $\|v\|_G = \mu$ , et  $(u, v)$  solution du problème de Meyer (3.3.20).*

**Preuve :** C'est une conséquence des Propositions 3.3.4 et 3.3.5, ainsi que du théorème suivant (appliqué à la multi-application  $T_\mu = T - \mu$ ) que nous donnons ici.

**Théorème 3.3.1.** *On considère une multi-application  $L$  :*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}) \\ \alpha &\mapsto [L_{\min}(\alpha), L_{\max}(\alpha)] \end{aligned}$$

*On suppose que  $L$  est telle que :*

1.  *$L$  est s.c.s. (semi-continu supérieurement).*
2. *Il existe  $a \in \mathbb{R}$  (resp.  $b \in \mathbb{R}$ ) tel que  $L_{\min}(a) \leq 0$  (resp.  $L_{\max}(b) \geq 0$ ).*

*Alors il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $0 \in L(c)$ .*

■

**Remarque :** Ce corollaire complète le résultat de la Proposition 3.3.3. Il fait complètement le lien avec le problème de Meyer (3.3.20) et notre problème limite (3.3.25).

Nous avons finalement montré que résoudre notre problème (3.3.23) permet bien de résoudre le problème de Meyer (3.3.20), c'est à dire de décomposer une image en une partie géométrique et une partie texture. Notre étude mathématique va être confortée par les résultats numériques que nous présentons dans la section suivante.

## 3.4 . Comparaisons

### 3.4.1 Introduction

Dans cette section, on veut comparer le modèle de Rudin-Osher-Fatemi (ROF) (2.1.7) avec celui de Meyer (3.1.1). On rajoute du bruit sur l'image de Lenna (Figure 3.1), un bruit gaussien de variance  $\sigma$ . On restaure l'image en utilisant successivement le modèle ROF et celui de Meyer. Pour le modèle ROF, on utilise l'algorithme proposé par Chambolle pour minimiser la variation totale. Pour le modèle de Meyer, on utilise l'algorithme (3.2.9)–(3.2.12) qu'on note  $A^2BC$ . On montre les résultats sur la Figure 3.2.

On a aussi testé notre algorithme sur l'image Barbara qui était utilisée dans [166] (cf Figure 3.3). On peut ainsi comparer notre résultat avec le modèle ROF, ainsi qu'avec l'algorithme de Vese-Osher (VO). Les deux auteurs de [166] nous ont en effet donné leurs résultats numériques (cf Figure 3.8).

### 3.4.2 Commentaires

On compare la composante oscillante  $v$  donnée par notre algorithme avec celle donnée par le modèle ROF. Leurs moyennes sont toutes très proches de zéro.

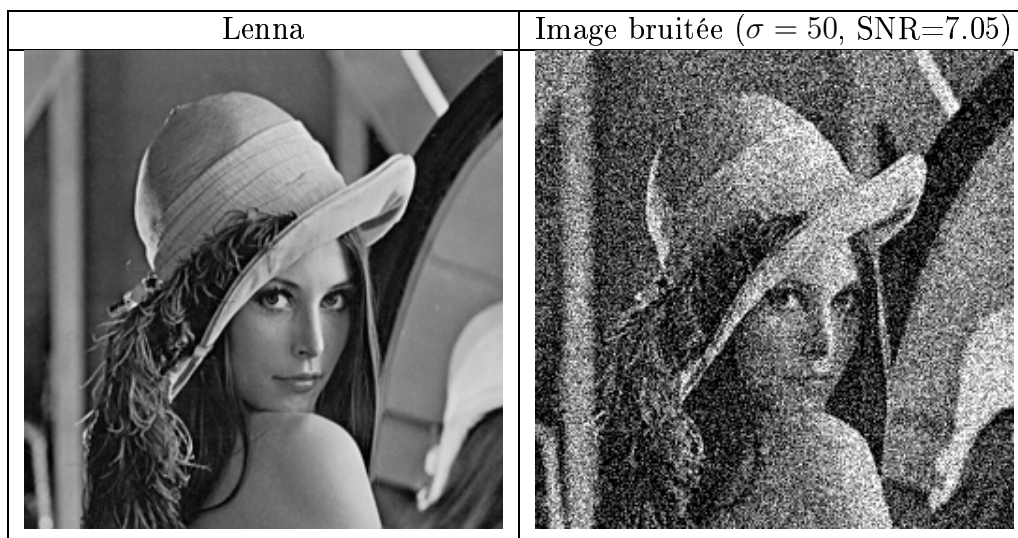


FIG. 3.1 – Lenna

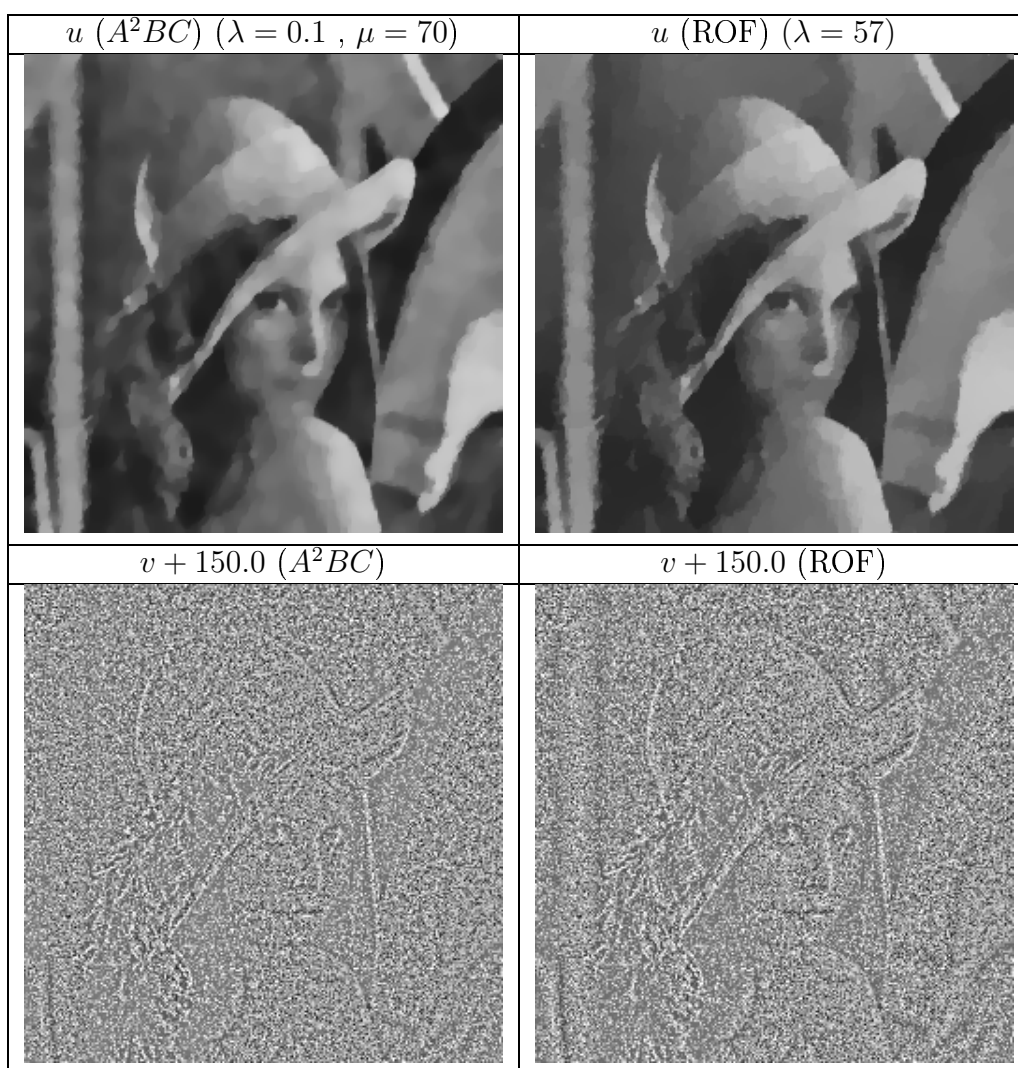


FIG. 3.2 – Comparaison pour  $\sigma = 50$ . SNR=7.05



Barbara



Reconstruction  $(u + v)$  ( $\lambda = 1.0$ ,  $\mu = 100$ )



FIG. 3.3 – Barbara

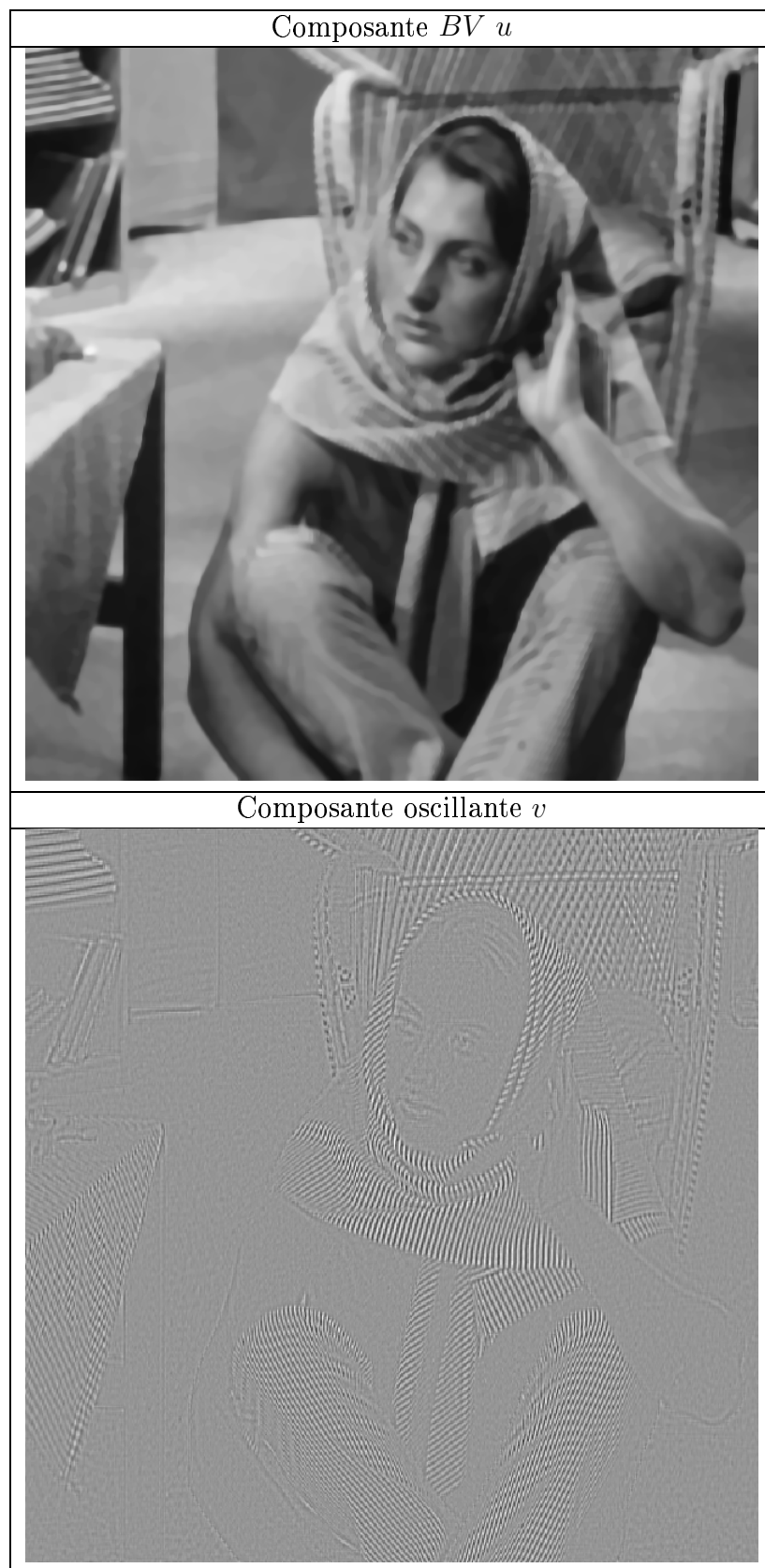


FIG. 3.4 – Décomposition avec notre modèle pour  $\lambda = 1.0$  et  $\mu = 100$ .  
 $\|v_{A^2BC}\|_{L^2}$  est ici équivalente à  $\|v_{ROF}\|_{L^2}$  dans la Figure 3.5.

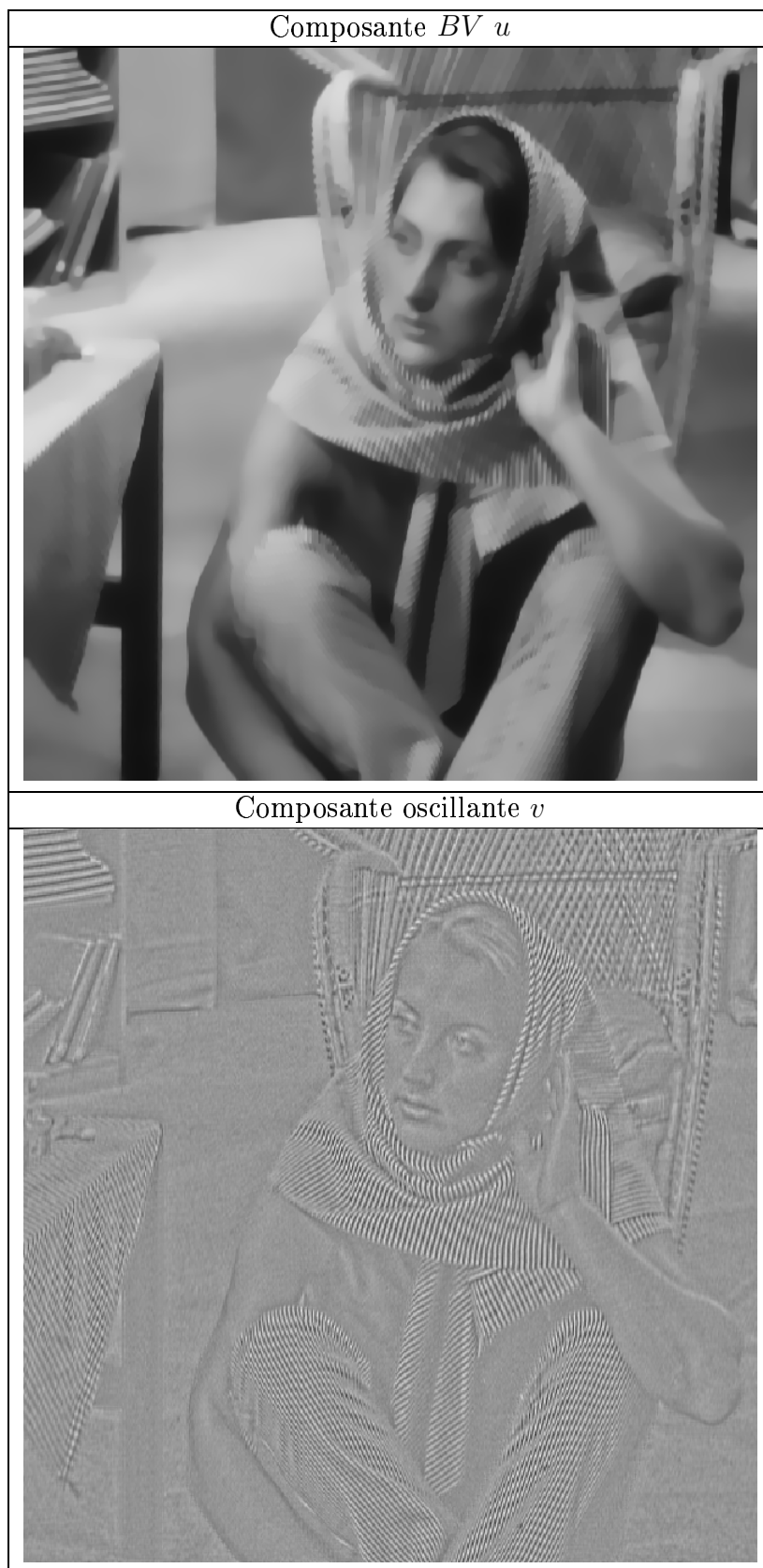


FIG. 3.5 – Décomposition avec le modèle ROF pour  $\lambda = 43$ .  $\|v_{ROF}\|_{L^2}$  est ici équivalente à  $\|v_{A^2BC}\|_{L^2}$  dans la Figure 3.4.

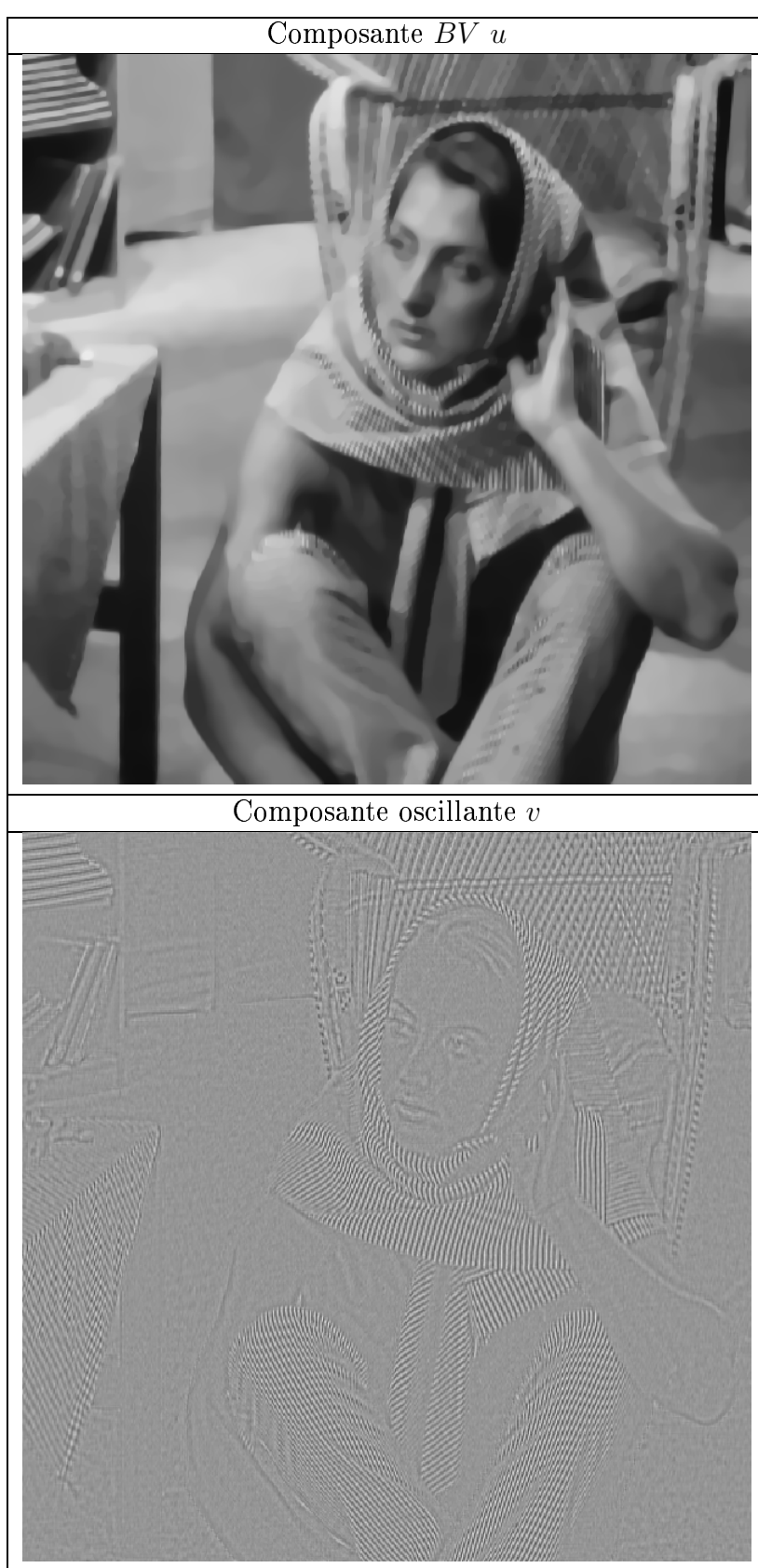


FIG. 3.6 – Décomposition avec notre modèle pour  $\lambda = 2.5$  et  $\mu = 35$ .  
 $\|v_{A^2BC}\|_{L^2}$  est ici équivalente à  $\|v_{ROF}\|_{L^2}$  dans la Figure 3.7 et aussi à  $\|v_{VO}\|_{L^2}$  dans la Figure 3.8.

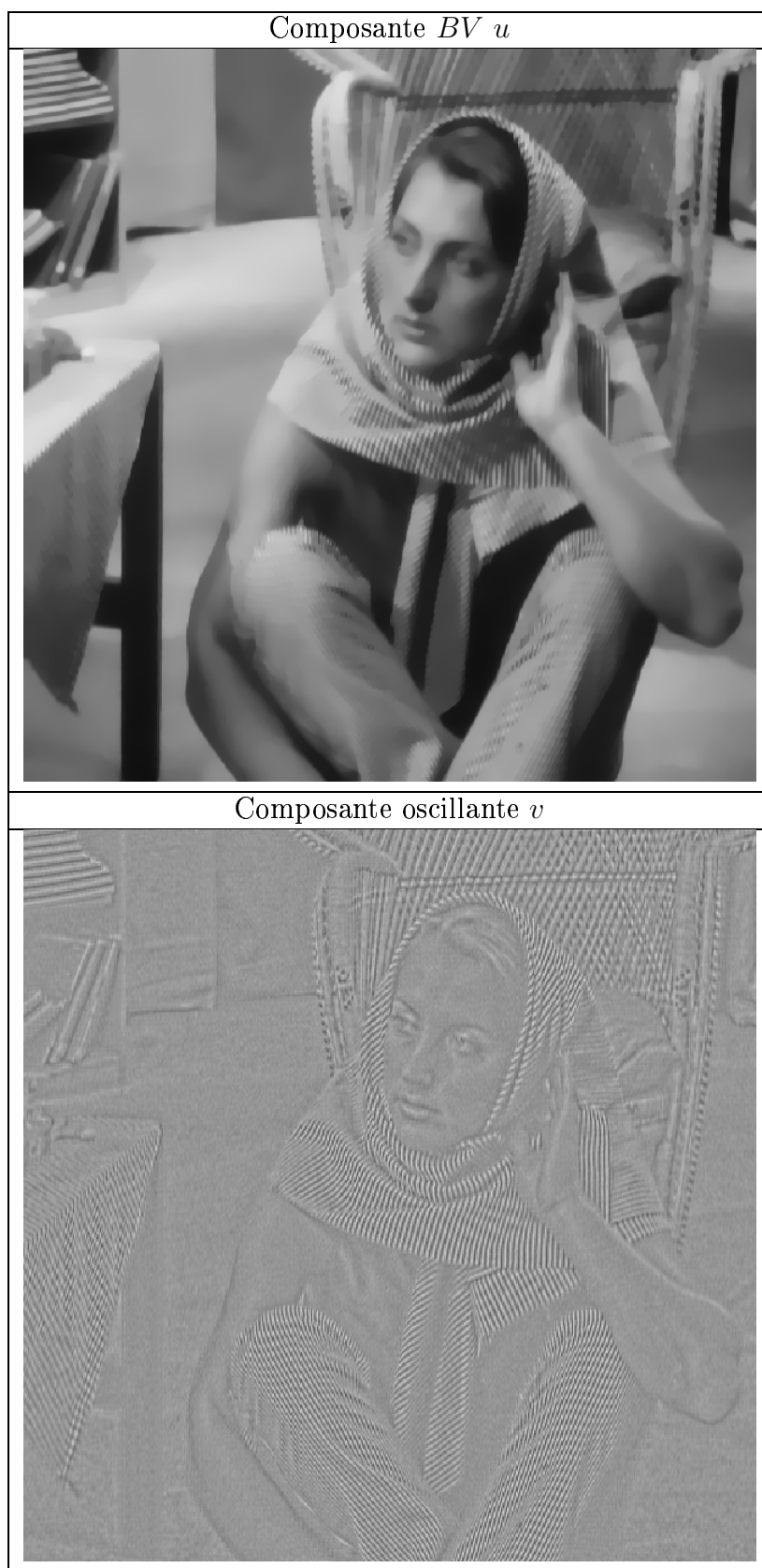


FIG. 3.7 – Décomposition avec le modèle ROF pour  $\lambda = 32$ .  
 $\|v_{ROF}\|_{L^2}$  est ici équivalente à  $\|v_{A^2BC}\|_{L^2}$  dans la Figure 3.6 et aussi à  $\|v_{VO}\|_{L^2}$  dans la Figure 3.8.

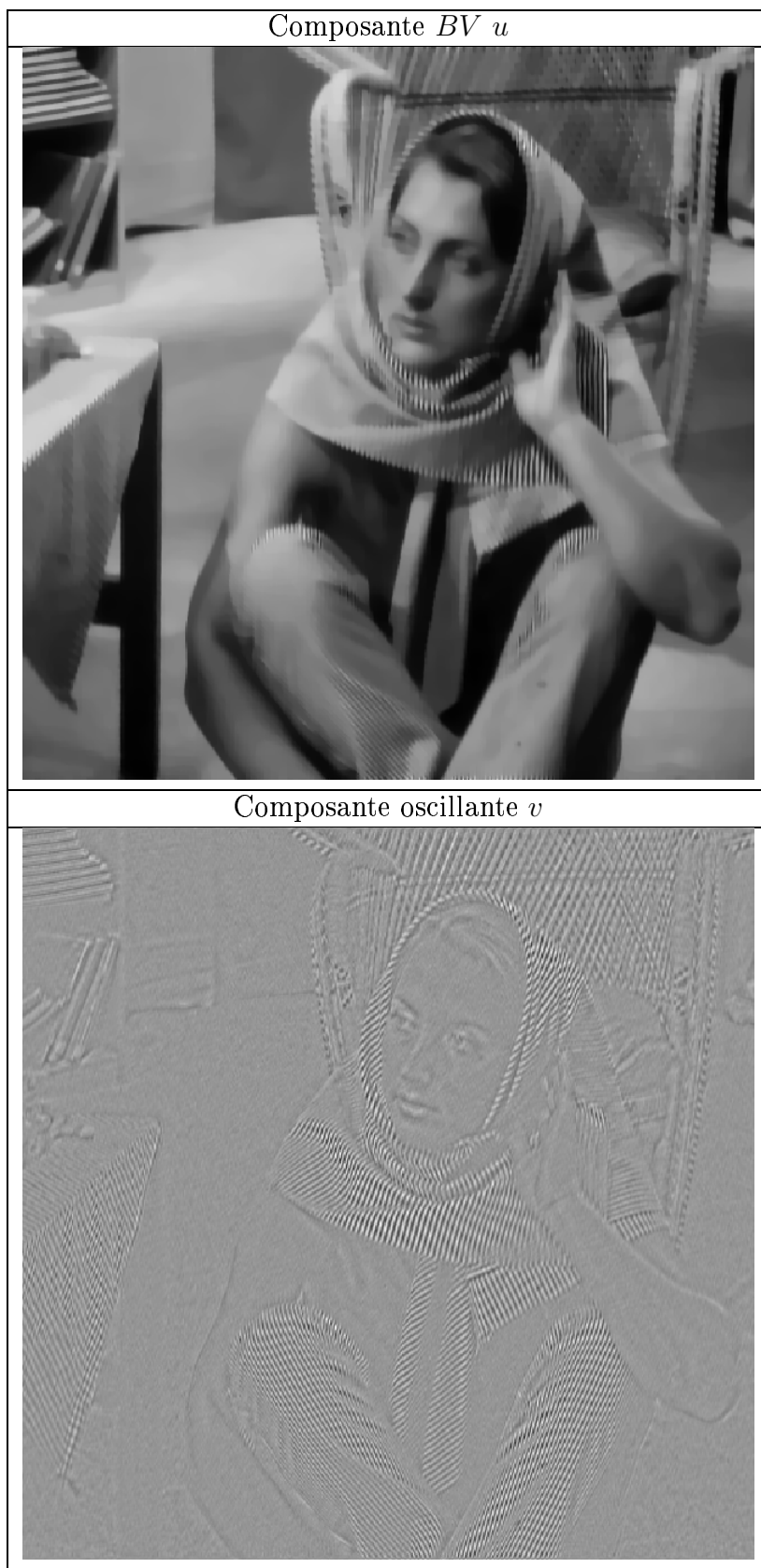


FIG. 3.8 – Décomposition avec le modèle VO pour  $\lambda = 0.2$  et  $\mu = 0.01$ .  
 $\|v_{VO}\|_{L^2}$  est ici équivalente à  $\|v_{A^2BC}\|_{L^2}$  dans la Figure 3.6 et aussi à  $\|v_{ROF}\|_{L^2}$  dans la Figure 3.7.

Dans le cas du modèle ROF, le paramètre  $\lambda$  correspond à celui de (2.1.7), et dans le cas du modèle de Meyer, les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  correspondent à ceux de (3.2.4). Dans le cas de l'algorithme de Vese-Osher (VO), les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  correspondent à ceux de (3.1.2). Pour faire des comparaisons, on règle ces paramètres de sorte que  $\|v_{A^2BC}\|_{L^2} \simeq \|v_{ROF}\|_{L^2} \simeq \|v_{VO}\|_{L^2}$  : la composante  $v$  contient la même quantité d'information. On veut comparer cette information.  $v_{A^2BC}$  désigne la composante  $v$  que l'on obtient avec notre algorithme,  $v_{ROF}$  celle correspondant au modèle ROF, et  $v_{VO}$  pour l'algorithme VO.

Sur la Figure 3.2, on voit que le visage de Lenna apparaît plus dans  $v_{ROF}$  que dans  $v_{A^2BC}$ . Cela signifie que, comme annoncé par Y. Meyer dans [133], les contours sont mieux préservés par son modèle (3.1.1) que par le modèle (2.1.7).

Sur les Figures 3.4 et 3.5, ainsi que sur les Figures 3.6 et 3.7, on voit que  $v_{A^2BC}$  correspond plus à la partie texturée de l'image Barbara que  $v_{ROF}$ . On voit aussi que le visage de Barbara apparaît plus dans  $v_{ROF}$  que dans  $v_{A^2BC}$ . Cela confirme l'analyse d'Y. Meyer [133]. De plus, le pied de la table apparaît plus dans  $v_{ROF}$  que dans  $v_{A^2BC}$ , et il ne s'agit pas d'une composante texturée de l'image.

Pour toutes ces raisons, notre algorithme (inspiré du modèle de Meyer) donne une meilleure décomposition d'une image en une composante  $BV$  et une composante oscillante que le modèle ROF.

Sur les Figures 3.6 et 3.8, on peut comparer notre algorithme avec celui de Vese-Osher (VO) (en regardant la Figure 3.6 avec le modèle ROF). On fixe les paramètres de sorte que  $\|v_{A^2BC}\|_{L^2} \simeq \|v_{VO}\|_{L^2}$ . Les deux résultats sont très proches (et tous les deux meilleurs que celui obtenu avec le modèle ROF). Néanmoins, le visage de Barbara apparaît plus sur  $v_{VO}$  que sur  $v_{A^2BC}$ . De plus, les textures à côté de la main gauche de Barbara n'apparaissent pas dans  $v_{VO}$  (contrairement à  $v_{A^2BC}$ ). C'est pourquoi notre algorithme semble plus performant que à celui de Vese-Osher [166].

### 3.5 . Réglage des paramètres dans le cas du débruitage

Nous nous intéressons ici au problème du réglage des paramètres pour l'algorithme de décomposition  $u + v$  que nous venons d'introduire. Dans le cas du débruitage, nous donnons une manière d'estimer le paramètre  $\mu$  en fonction de l'écart-type (supposé connu) du bruit.

$f$  étant l'image dégradée, on rappelle que la fonctionnelle à minimiser est la suivante :

$$\inf_{(u,v) \in X \times G_\mu} \left( J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|_X^2 \right) \quad (3.5.1)$$

Pour utiliser notre algorithme  $u + v$  (3.2.9)–(3.2.12) pour restaurer une image  $f$ , il faut régler les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ . Le paramètre  $\lambda$  contrôle la norme  $L^2$  du résidu  $f - u - v$ . Plus  $\lambda$  est petit, et plus la norme  $L^2$  du résidu  $f - u - v$  diminue. Plus  $\mu$  est grand, et plus  $v$  contient d'information.

En fait, le choix de  $\lambda$  est facile. Il suffit de le choisir petit. Par exemple, avec une valeur  $\lambda = 0.1$ , on trouve que la norme  $\|f - u - v\|_{L^\infty}$  reste inférieure à 0.5 (pour des valeurs de  $f$  allant de 0 à 255).

Le paramètre  $\mu$  est nettement plus difficile à régler. Il contrôle la norme  $G$  de la composante oscillante  $v$ . Des exemples de calculs de la norme  $G$  de bruits gaussiens ont été présentés dans la Section 2.5.

#### Choix du paramètre $\mu$

On suppose que l'image  $u$  a été dégradée par un bruit gaussien de variance  $\sigma^2$ . On veut supprimer ce bruit : on veut donc que la composante  $v$  soit un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma^2$ .

Dans le modèle de Rudin-Osher-Fatemi [149], il est suggéré de minimiser la variation totale sous la contrainte que le résidu soit de variance  $\sigma^2$ . Si on veut appliquer la même idée pour notre algorithme  $u + v$  (3.2.9)–(3.2.12), on doit connaître la norme  $G$  d'un bruit gaussien  $n$  d'écart-type  $\sigma$  donné. Par homogénéité de la norme,  $\frac{\|n\|_G}{\sigma}$  doit rester constante (au moins lorsque le nombre de points est assez grand, la taille de l'image étant fixée). Cependant, la forte non-linéarité de la norme  $G$  ne permet pas de le vérifier rigoureusement (i.e. que cette constante ne soit pas sensible au tirage du bruit gaussien).

On a calculé la norme  $G$  de bruits blancs gaussiens (de variance  $\sigma^2$ ) avec l'algorithme décrit dans la sous-section 2.2.3. Par exemple, on a vérifié que la norme  $G$  d'un bruit blanc gaussien d'écart-type  $\sigma = 1$  est très proche de 1.6 pour une image de taille 128\*128.

On peut alors calculer la norme  $G$  de n'importe quel bruit gaussien  $n$  de taille 128\*128, à condition de connaître sa variance  $\sigma^2$  :

$$\|n\|_G \sim 1.6 \sigma \quad (3.5.2)$$

Cela donne la valeur du paramètre  $\mu$  pour notre algorithme  $u + v$  (3.2.9)–(3.2.12). La Figure 3.9 montre le résultat obtenu avec ce choix pour le paramètre  $\mu$  dans un cas particulier d'image de taille 128\*128.

### 3.6 . Retour sur le modèle de Osher-Solé-Vese

Nous revenons ici sur le modèle proposé par Osher-Solé-Vese dans [143], que nous avons présenté dans la sous-section 3.1.4. Nous proposons ici un algorithme original pour le ré-



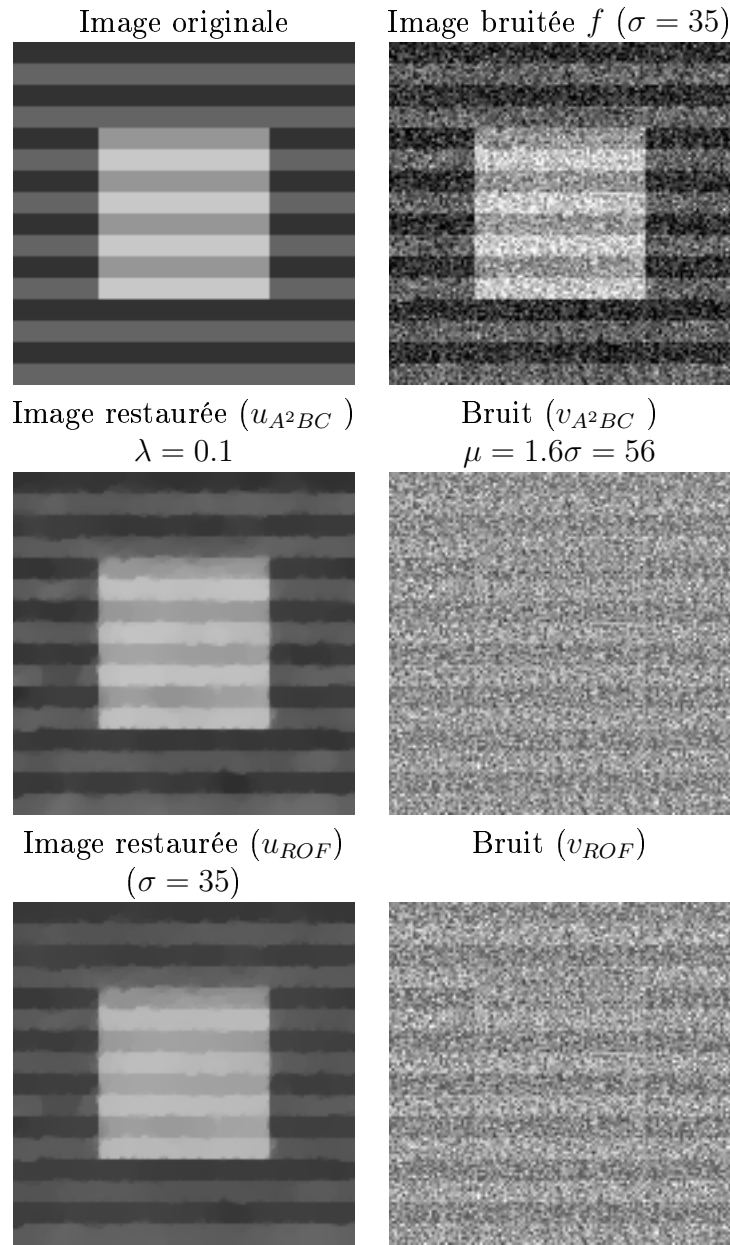


FIG. 3.9 – Débruitage avec les algorithmes  $A^2BC$  et  $ROF$

soudre, algorithme inspiré de celui introduit par A. Chambolle pour résoudre le problème de Rudin-Osher-Fatemi [49] (cf la Section 2.1.4). On montre sur des exemples numériques que c'est un excellent algorithme de débruitage, mais qu'il apparaît par-contre moins bon que notre algorithme  $u + v$  pour séparer partie géométrique et texture.

On rappelle que le problème considéré est :

$$\inf_u \left( J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u\|_{-1,2}^2 \right) \quad (3.6.1)$$

On a le résultat suivant :

**Proposition 3.6.1.** *Si  $\hat{u}$  est solution du problème (3.6.1), alors  $\hat{v} = \Delta^{-1} \left( \frac{\hat{u} - f}{\lambda} \right)$  est solution du problème :*

$$\inf_v \left( \frac{\lambda}{2} \|\nabla v\|_Y^2 - (f, v)_X + J^*(v) \right) \quad (3.6.2)$$

**Preuve :** Il existe de nombreuses manières de montrer ce résultat (cf [78]). On peut par exemple donner une preuve très similaire à celle de la Proposition 2.1.1. D'après la Proposition 2.3.1, on a  $\|f - u\|_{-1,2}^2 = (-f + u, \Delta^{-1}(f - u))_X$ . Si  $u$  est un minimiseur de (3.6.1), alors nécessairement :

$$0 \in -\Delta^{-1} \left( \frac{u - f}{\lambda} \right) + \partial J(u) \quad (3.6.3)$$

(3.6.3) est équivalent à :

$$\Delta^{-1} \left( \frac{u - f}{\lambda} \right) \in \partial J(u) \quad (3.6.4)$$

On passe ensuite à la formulation duale en utilisant une équivalence classique en analyse convexe (cf [78]) : (3.6.4) est équivalente à

$$u \in \partial J^* \left( \Delta^{-1} \left( \frac{u - f}{\lambda} \right) \right) \quad (3.6.5)$$

soit encore

$$0 \in \frac{f - u}{\lambda} - \frac{f}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \partial J^* \left( \Delta^{-1} \left( \frac{u - f}{\lambda} \right) \right) \quad (3.6.6)$$

On pose alors  $v = \Delta^{-1} \left( \frac{u - f}{\lambda} \right)$ , et (3.6.6) se réécrit :

$$0 \in -\Delta v - \frac{f}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \partial J^*(v) \quad (3.6.7)$$

Donc  $v$  est solution du problème 3.6.2. ■

**Algorithme :** D'après la Proposition 3.6.1, on a

$$\hat{u} = f + \lambda \Delta \hat{v} \quad (3.6.8)$$

Donc pour calculer  $\hat{u}$ , il suffit de calculer  $\hat{v}$  solution de (3.6.2). Comme  $J^*$  est donnée par (2.1.20),  $\hat{v}$  est en fait solution du problème :

$$\min \left\{ \frac{\lambda}{2} \|\nabla \operatorname{div}(p)\|_Y^2 + (\nabla f, p)_Y : p / |p_{i,j}| \leq 1 \ \forall i, j = 1, \dots, N \right\} \quad (3.6.9)$$

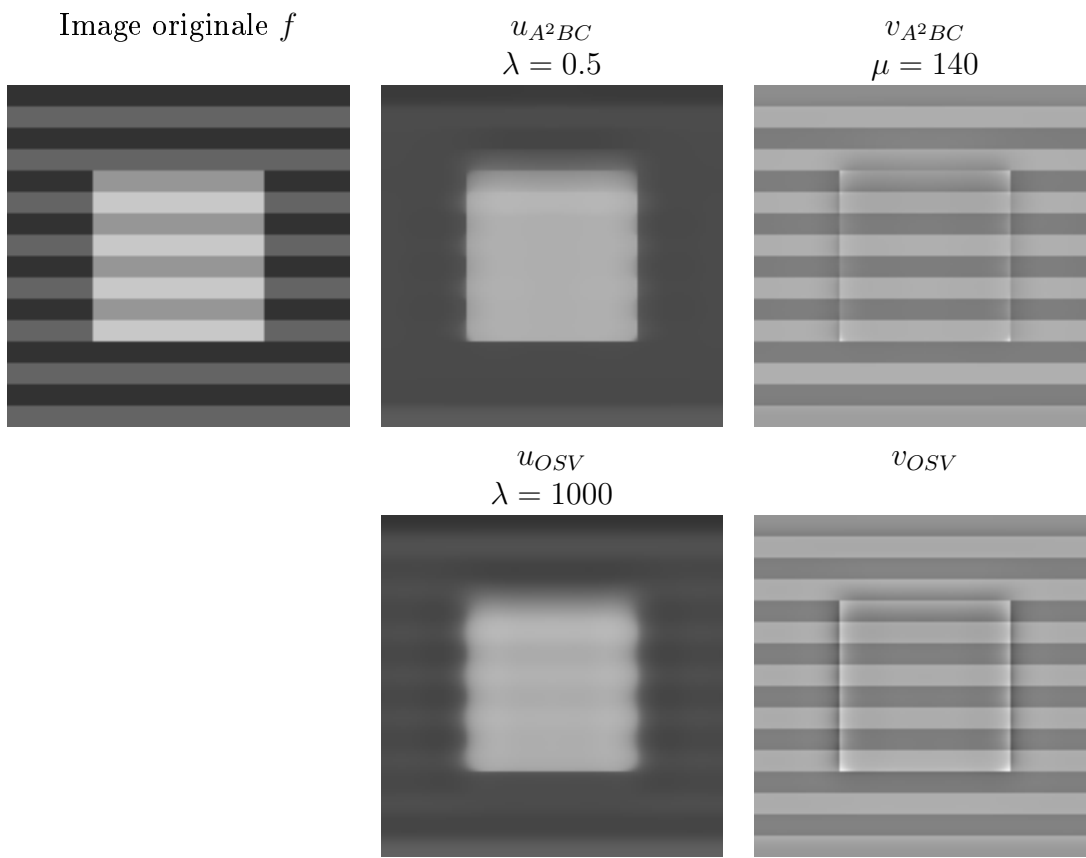


FIG. 3.10 – Décomposition (les paramètres sont réglés de sorte que  $v_{OSV}$  et  $v_{A^2BC}$  aient la même norme  $L^2$ )

En reprenant la démarche de [49], on voit qu'on peut résoudre ce problème par une méthode de point fixe.

$$p^0 = 0 \quad (3.6.10)$$

et

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{p_{i,j}^n - \tau(\nabla(\Delta \operatorname{div}(p^n) + f/\lambda))_{i,j}}{1 + \tau|(\nabla(\Delta \operatorname{div}(p^n) + f/\lambda))_{i,j}|} \quad (3.6.11)$$

Et comme dans [49], on montre que pour  $\tau$  suffisamment petit, on a  $f + \lambda \Delta \operatorname{div} p^n \rightarrow \hat{u}$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Résultats numériques :** La Figure 3.11 est à comparer avec la Figure 3.9. Comme algorithme de débruitage (dans le cas d'un bruit gaussien), le modèle OSV semble plus performant que les modèles *ROF* et *A<sup>2</sup>BC*. En effet, la composante  $v$  contient une très légère partie de l'information géométrique de l'image dans le cas des algorithmes *ROF* ou *A<sup>2</sup>BC*, contrairement au cas de l'algorithme *OSV*.

La Figure 3.10 montre une comparaison entre les modèles OSV et *A<sup>2</sup>BC*. En tant qu'algorithme de décomposition d'image (c'est à dire pour séparer les textures de la partie géométrique, le modèle de Meyer (et donc l'algorithme *A<sup>2</sup>BC* (3.2.9)–(3.2.12)) semble par-contre plus performant que le modèle OSV. En effet, les carrés de la composante géométrique  $u$  sont nettement moins bien conservés avec le modèle *OSV* qu'avec le modèle *A<sup>2</sup>BC*.

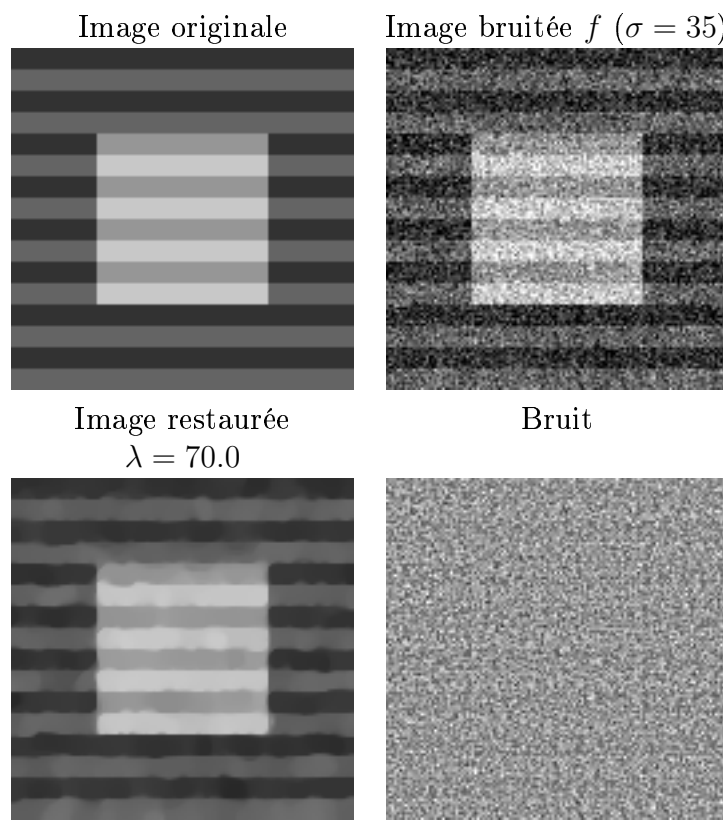


FIG. 3.11 – Débruitage de rayures avec le modèle d'Osher-Sole-Vese

### 3.7 . Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donc proposé un nouvel algorithme de décomposition d'images en deux composantes, l'une contenant l'information géométrique et l'autre l'information texture. Cet algorithme apparaît comme particulièrement performant par rapport aux autres méthodes existantes. De plus, nous avons effectué l'analyse complète de notre modèle dans le cas discret. Notre algorithme de décomposition  $u + v$  consitue l'une des contributions essentielles de notre travail. Nous présenterons deux applications de cet algorithme au Chapitre 5.

Nous allons maintenant l'étudier dans le cas continu. Mais au préalable, il va nous falloir donner une définition de  $G$  en continu adaptée au cas d'un ouvert borné.



# Chapitre 4

## Modèle $u + v$ (cas continu)

### 4.1 . Préliminaires

#### 4.1.1 Introduction

Comme nous l'avons précisé dans les sous-sections 2.2.1 et 3.1.2, pour modéliser les signaux oscillants, Y. Meyer a introduit l'espace  $G$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Sa démarche dans [133] utilise des arguments d'analyse harmonique. Mais il se trouve que le cadre adapté au traitement d'images est celui d'un ouvert  $\Omega$  borné. En particulier, nous sommes amenés à choisir des conditions de bord (dans [133], l'auteur se place dans la classe de Schwartz, c'est-à-dire dans la classe des fonctions à décroissance rapide à l'infini).

Dans ce chapitre, nous commençons par donner une définition de l'espace  $G$  adaptée au cas d'un ouvert  $\Omega$  borné (ce qui nous amène à introduire des conditions sur la trace normale sur  $\partial\Omega$  des fonctions que nous allons considérer). Il nous faut alors montrer que notre nouvel espace  $G$  reste un espace bien adapté aux signaux fortement oscillants, ce que nous faisons à l'aide d'outils d'analyse fonctionnelle. Nous sommes ensuite en mesure d'étudier dans ce cadre le problème de Meyer (3.1.1). Enfin, dans la Section 4.3 nous pouvons mener l'étude de l'algorithme (3.2.9)–(3.2.12) que nous avons introduit au chapitre précédent (les preuves sont cependant plus techniques).

Nous avons présenté ce travail dans [13, 19].

#### 4.1.2 Ensemble *Régulier*

Nous aurons besoin de la notion (technique) d'ensemble régulier, que nous introduisons ici.

**Définition 4.1.1.** On dit que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est *régulier* s'il vérifie la propriété suivante : il existe  $\eta > 0$  et  $A > 0$  dépendant seulement de  $\Omega$  tel que pour tout  $\epsilon \in (0, \eta)$ , et pour tout  $x \in \Omega$ ,

$$|B(x, \epsilon) \cap \Omega| \geq A\epsilon^2 \quad (4.1.1)$$

où  $B(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^2 / \|x - y\| \leq \epsilon\}$ , et  $|B(x, \epsilon) \cap \Omega|$  désigne la mesure de Lebesgue de  $B(x, \epsilon) \cap \Omega$ .

La preuve du résultat suivant est élémentaire, mais à notre connaissance originale.

**Lemme 4.1.1.** Soit  $\Omega$  tel que  $\partial\Omega$  soit  $C^2$  et de longueur finie. Alors  $\Omega$  est régulier.

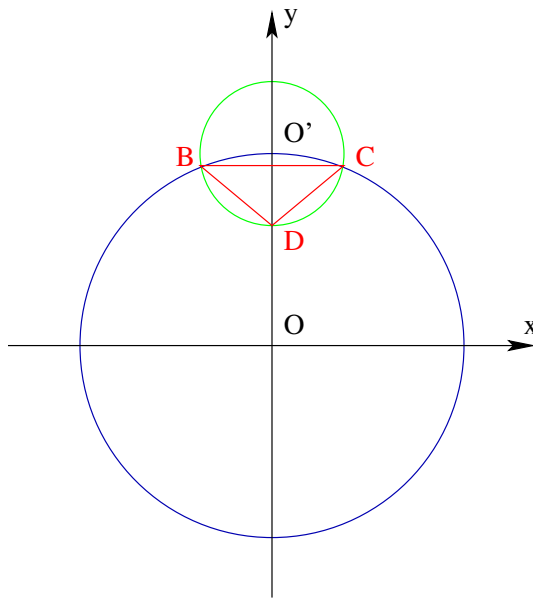


FIG. 4.1 – Cas où  $\Omega = B(O, R)$  ( $O'$  est sur le cercle  $B(O, R)$ )

**Remarque :** Si  $\Omega$  est un ouvert polygonal, alors  $\Omega$  est également *régulier*.

**Preuve du Lemme 4.1.1 :** On découpe la preuve en deux parties :

Etape 1 :

On suppose d'abord que  $\Omega = B(O, R)$  avec  $R > 0$ .

On fixe  $\epsilon \in (0, R)$ . On veut trouver  $\eta > 0$  et  $A > 0$  tels que  $|B(x, \epsilon) \cap \Omega| \geq A\epsilon^2$  pour tout  $\epsilon \in (0, \eta)$  et pour tout  $x \in \Omega$ . Le cas le plus défavorable est présenté sur la Figure 4.1 : des constantes  $\eta$  et  $A$  valables dans ce cas seront valables dans tous les autres. On note  $\mathcal{A}$  l'aire du triangle BCD sur la Figure 4.1. On a donc :

$$|B(x, \epsilon) \cap \Omega| \geq \mathcal{A} \quad (4.1.2)$$

L'équation de  $B(O, R)$  est  $x^2 + y^2 = R^2$ , et celle de  $B(O', \epsilon)$  :  $x^2 + (y - R)^2 = \epsilon^2$ . On note  $(x_C, y_C)$  les coordonnées du point C. On voit que  $y_C$  est la solution de :

$$R^2 - y_C^2 = \epsilon^2 - (y_C - R)^2 \quad (4.1.3)$$

i.e.  $2R^2 - \epsilon^2 = 2Ry_C$ . D'où  $y_C = R - \frac{\epsilon^2}{2R}$ . Et comme  $x_C^2 = R^2 - y_C^2$ , on obtient  $x_C = \sqrt{\epsilon^2 - \frac{\epsilon^4}{4R^2}}$ . On en déduit que :

$$\mathcal{A} = \left( \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2R} \right) \sqrt{\epsilon^2 - \frac{\epsilon^4}{4R^2}} \quad (4.1.4)$$

On obtient alors que  $\mathcal{A} \sim \epsilon^2$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . Il existe donc  $\eta \in (0, R)$  tel qu'il existe  $A > 0$ , dépendant seulement de  $R$ , tel que  $\mathcal{A} \geq A\epsilon^2$  pour tout  $\epsilon \in (0, \eta)$ . On conclut grâce à (4.1.2).

Etape 2 :

On considère maintenant le cas général. On paramétrise  $\partial\Omega$  par son abscisse curviligne  $\gamma : [0; L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  (où  $L$  désigne la longueur de  $\Gamma$ ). On note  $t \mapsto \kappa(\gamma(t))$  sa courbure (qui est  $C^0$  car  $\partial\Omega$  est  $C^2$ ). On voit que  $\kappa(\gamma([0; L]))$  est compact dans  $\mathbb{R}$ . D'où  $\kappa(\gamma([0; L])) = [\rho_1, \rho_2]$

avec  $\rho_1$  et  $\rho_2$  dans  $\mathbb{R}$ . On note  $\rho_0 = \max(|\rho_1|, |\rho_2|)$ . Comme  $\Omega$  n'est pas vide, on sait que  $\rho_0 > 0$ .

On veut trouver  $\eta > 0$  et  $A > 0$  tels que  $|B(x, \epsilon) \cap \Omega| \geq A\epsilon^2$  pour tout  $\epsilon \in (0, \eta)$ . D'après ce qui précède dans l'étape 2, on en déduit que l'on pourra conclure si le résultat est vrai pour  $\Omega = B\left(O, \frac{1}{\rho_0}\right)$ , ce que l'on sait grâce à l'étape 1. ■

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant :

**Lemme 4.1.2.**  *$\Omega$  est supposé régulier. Considérons une suite  $w_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :*

1.  $\|w_n\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .
2. Il existe  $\theta \in (0, 1)$  et  $C > 0$  tels que pour tout  $x$  et tout  $y \in \Omega$ ,  $|w_n(x) - w_n(y)| \leq C|x - y|^\theta$ .

Alors  $\|w_n\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Proof :** On fixe  $x \in \Omega$ . On peut écrire  $w_n(x) = w_n(x) - w_n(y) + w_n(y)$ . Cela implique  $|w_n(x)| \leq |w_n(x) - w_n(y)| + |w_n(y)|$ . En utilisant l'hypothèse 2, on obtient :

$$|w_n(x)| \leq C|x - y|^\theta + |w_n(y)| \quad (4.1.5)$$

Soit  $\epsilon \in (0, \eta)$  ( $\eta$  comme dans la Définition 4.1.1), et notons  $B = B(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^2 / |x - y| \leq \epsilon\}$ . De (4.1.5), on obtient :

$$|B \cap \Omega| |w_n(x)| \leq C \int_{B \cap \Omega} |x - y|^\theta dy + \int_{B \cap \Omega} |w_n(y)| dy \quad (4.1.6)$$

D'où

$$|B \cap \Omega| |w_n(x)| \leq C \int_B |x - y|^\theta dy + \int_\Omega |w_n(y)| dy \quad (4.1.7)$$

Comme  $\Omega$  est régulier, on a  $|B \cap \Omega| \geq A\epsilon^2$ . Et en passant en coordonnées polaires, on a :

$$\int_B |x - y|^\theta dy = 2\pi \int_0^\epsilon r^\theta r dr = \frac{2\pi}{\theta + 2} \epsilon^{\theta+2} \quad (4.1.8)$$

De (4.1.7), on obtient :

$$A\epsilon^2 |w_n(x)| \leq \frac{2\pi C}{\theta + 2} \epsilon^{\theta+2} + \int_\Omega |w_n(y)| dy \quad (4.1.9)$$

i.e :

$$|w_n(x)| \leq \frac{2\pi C}{A(\theta + 2)} \epsilon^\theta + \frac{1}{A\epsilon^2} \int_\Omega |w_n(y)| dy \quad (4.1.10)$$

On note  $C' = \frac{2\pi C}{A(\theta + 2)}$ , et on tire de (4.1.10) que :

$$|w_n(x)| \leq C' \epsilon^\theta + \frac{1}{A\epsilon^2} \int_\Omega |w_n(y)| dy \quad (4.1.11)$$

D'où :

$$\|w_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C' \epsilon^\theta + \frac{1}{A\epsilon^2} \|w_n\|_{L^1(\Omega)} \quad (4.1.12)$$



On fait  $n \rightarrow +\infty$ , et on obtient (car  $\|w_n\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$ ) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|w_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C' \epsilon^\theta \quad (4.1.13)$$

Comme (4.1.13) est vrai pour tout  $\epsilon \in (0, \eta)$ , on peut faire  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , et on obtient ainsi que  $\|w_n\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . ■

### 4.1.3 Définition et propriétés de $G(\Omega)$ (cas continu)

Nous sommes désormais en mesure d'introduire une version continue de l'espace  $G$ . Il s'agit de la contribution la plus importante de ce chapitre.

Dans toute la suite, on note  $\Omega$  un ouvert connexe  $\mathbb{R}^2$  à bord Lipschitz. On adapte la Définition 2.2.1 concernant l'espace  $G$  au cas de  $\Omega$ . Nous allons considérer un sous-espace du Banach  $W^{-1,\infty}(\Omega) = (W_0^{1,1}(\Omega))'$  (l'espace dual de  $W_0^{1,1}(\Omega)$ ).

**Définition 4.1.2.**  $G(\Omega)$  est le sous-espace de  $W^{-1,\infty}(\Omega)$  défini par :

$$G(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) / v = \operatorname{div} \xi, \xi \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2), \xi.N = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \quad (4.1.14)$$

(où  $\xi.N$  désigne la trace normale de  $\xi$  sur  $\partial\Omega$ ). Sur  $G(\Omega)$ , on définit la norme suivante :

$$\|v\|_{G(\Omega)} = \inf \{\|\xi\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)} / v = \operatorname{div} \xi, \xi.N = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \quad (4.1.15)$$

**Remarque :**  $G(\Omega)$  n'est pas un Banach. En particulier,  $G(\Omega)$  n'est pas le dual d'un espace vectoriel normé (cf [42]).

Pour montrer que  $G(\Omega)$  n'est pas complet, considérons l'exemple suivant : Soit  $\Omega = [-2, 2]^2$ , et la fonction :

$$\xi(x_1, x_2) = \begin{cases} \sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|} - 1 & \text{si } \sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|} \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.1.16)$$

On calcule  $\operatorname{div} \xi$  au sens des distributions :

$$\operatorname{div} \xi(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{|x_1|}} \operatorname{signe}(x_1) + \frac{1}{2\sqrt{|x_2|}} \operatorname{signe}(x_2) & \text{si } \sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|} \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.1.17)$$

On a  $\xi \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\xi.N = 0$  sur  $\partial\Omega$ , et  $v = \operatorname{div} \xi \in L^1(\Omega)$  mais pas dans  $L^2(\Omega)$ .

Pour  $n \geq 1$ , on pose :

$$\xi_n(x_1, x_2) = \begin{cases} \sqrt{|x_1| + \frac{1}{n}} + \sqrt{|x_2| + \frac{1}{n}} - 1 & \text{si } \sqrt{|x_1| + \frac{1}{n}} + \sqrt{|x_2| + \frac{1}{n}} \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.1.18)$$

On a  $\xi_n \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\xi_n.N = 0$  sur  $\partial\Omega$ , et  $v_n = \operatorname{div} \xi_n \in L^2(\Omega)$  (et donc  $v_n \in G(\Omega)$ ).

De plus, on a  $\xi_n \rightarrow \xi$  in  $L^\infty(\Omega)$ . La suite  $v_n = \operatorname{div} \xi_n$  est donc une suite de Cauchy dans  $G(\Omega)$ . Mais  $v = \operatorname{div} \xi$  n'est pas dans  $L^2(\Omega)$ . On conclut alors que  $G(\Omega)$  n'est pas complet pour la norme  $G$  (et donc que  $G(\Omega)$  n'est pas un espace de Banach). ■

On a la caractérisation simple suivante pour  $G(\Omega)$  :

**Proposition 4.1.1.**

$$G(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) / \int_{\Omega} v = 0 \right\} \quad (4.1.19)$$

**Preuve :** On note  $H(\Omega)$  le terme de droite dans (4.1.19). On sépare la preuve en deux étapes.

Etape 1 :

Soit  $v$  dans  $G(\Omega)$ . Alors, de (4.1.14) il est immédiat que  $\int_{\Omega} v = 0$ , i.e.  $v \in H(\Omega)$ .

Etape 2 :

Soit  $v$  dans  $H(\Omega)$ . Alors, en utilisant un résultat de Bourgain et Brézis [40] (Théorème 3') (voir aussi [41]), il existe  $\xi \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2) \cap W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2)$  tel que  $v = \operatorname{div} \xi$  et  $\xi = 0$  sur  $\partial\Omega$ . En particulier, on a  $\xi \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$  et  $\xi \cdot N = 0$  sur  $\partial\Omega$ , et donc  $v \in G(\Omega)$ . ■

**Remarque :** Insistons sur la force du résultat de [41, 40]. Il concerne le cas limite  $v$  dans  $L^q(\Omega)$ ,  $q = 2$ , lorsque la dimension de l'espace est  $N = 2$ . La méthode classique pour étudier les équations du genre  $\operatorname{div} \xi = v$  avec  $\xi \cdot N = 0$  sur  $\partial\Omega$  consiste à résoudre le problème  $\Delta u = v$  avec  $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$  sur  $\partial\Omega$ , et de choisir  $\xi = \nabla u$ . Si  $v$  est dans  $L^q(\Omega)$  avec  $q > 2$  ce problème admet une unique solution (à une constante additive près) dans  $W^{2,q}(\Omega)$ . De plus, en utilisant les injections de Sobolev standards (cf [79, 42, 87]),  $\xi = \nabla u$  appartient à  $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$ . Si  $q = 2$ , le résultat n'est plus vrai, et l'approche classique ne fonctionne pas. Le résultat de Bourgain et Brezis (que nous utilisons dans la preuve de la Proposition 4.1.1) est donc très fin.

Nous introduisons une famille de sous-ensembles convexes de  $G(\Omega)$ . Ces ensembles convexes seront utiles par la suite.

**Définition 4.1.3.** Soit  $G_\mu(\Omega)$  la famille de sous-ensemble définie par ( $\mu > 0$ ) :

$$G_\mu(\Omega) = \{ v \in G(\Omega) / \|v\|_{G(\Omega)} \leq \mu \} \quad (4.1.20)$$

**Lemme 4.1.3.**  $G_\mu(\Omega)$  est fermé pour la topologie forte de  $L^2(\Omega)$ .

**Preuve du Lemme 4.1.3** Soit  $(v_n)$  une suite dans  $G_\mu(\Omega)$  telle qu'il existe  $\hat{v} \in L^2(\Omega)$  avec  $v_n \rightarrow \hat{v}$  dans  $L^2(\Omega)$ -fort. On a  $v_n = \operatorname{div} \xi_n$ , avec  $\xi_n$  telle que  $\|\xi_n\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)} \leq \mu$  et  $\xi_n \cdot N = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Comme  $\|\xi_n\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)} \leq \mu$ , il existe  $\hat{\xi} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$  tel que à une extraction près :  $\xi_n \rightharpoonup \hat{\xi}$  dans  $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$  faible \*, et  $\|\hat{\xi}\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)} \leq \mu$ .

De plus, si  $\phi \in \mathbb{D}(\bar{\Omega})$  :  $\int_{\Omega} v_n \phi dx = \int_{\Omega} \operatorname{div} \xi_n \phi dx = - \int_{\Omega} \xi_n \nabla \phi dx$ . Et donc, comme  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient avec la formule de Stokes :

$$\int_{\Omega} \hat{v} \phi dx = - \int_{\Omega} \hat{\xi} \nabla \phi dx = \int_{\Omega} \operatorname{div} \hat{\xi} \phi dx - \int_{\partial\Omega} \hat{\xi} \cdot N \phi \quad (4.1.21)$$

En choisissant une fonction test dans  $C_c^\infty(\Omega)$ , on déduit de (4.1.21) que  $\hat{v} = \operatorname{div} \hat{\xi}$  dans  $\mathbb{D}'(\Omega)$ , et comme  $\hat{v} \in L^2(\Omega)$ , l'égalité reste vrai dans  $L^2(\Omega)$ . Ensuite, pour un  $\phi \in \mathbb{D}(\bar{\Omega})$  quelconque, il vient  $\hat{\xi} \cdot N = 0$  sur  $\partial\Omega$  (dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ ) (cf [114]). ■

## Remarques :

1. Notons  $K(\Omega)$  la fermeture dans  $L^2(\Omega)$  de l'ensemble :

$$\{\operatorname{div} \xi, \xi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2), \|\xi\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)} \leq 1\} \quad (4.1.22)$$

En utilisant le Lemme 4.1.3 et quelques résultats de [160], on peut montrer que  $K(\Omega) = G_1(\Omega)$ .

De plus, on peut aussi montrer de la même manière que  $G(\Omega)$  est la fermeture dans  $L^2(\Omega)$  de l'ensemble :

$$\{\operatorname{div} \xi, \xi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)\} \quad (4.1.23)$$

2. De la preuve du Lemme 4.1.3, on déduit facilement que  $\|\cdot\|_G$  est semi-continu inférieurement (sci).

On a également le résultat suivant :

**Lemme 4.1.4.** *Si  $v \in G(\Omega)$ , il existe  $\xi \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$  avec  $v = \operatorname{div} \xi$  et  $\xi \cdot N = 0$  sur  $\partial\Omega$ , et tel que  $\|v\|_G = \|\xi\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)}$ .*

**Preuve :** Soit  $v \in G(\Omega)$ . Considérons une suite  $\xi_n \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$  avec  $v = \operatorname{div} \xi_n$  et  $\xi_n \cdot N = 0$  sur  $\partial\Omega$ , et telle que  $\|\xi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow \|v\|_G$ . Il existe  $\xi \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$  telle que, à une extraction près,  $\xi_n \rightharpoonup \xi$  dans  $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$  faible \*. On peut ensuite montrer, comme dans la preuve du Lemme 4.1.3, que  $\xi \cdot N = 0$  sur  $\partial\Omega$  et que  $v = \operatorname{div} \xi$ .

■

**Principale propriété :** Le lemme suivant est dû Y. Meyer [133]. Mais il est énoncé dans le cas  $\Omega = \mathbb{R}^2$ , et la preuve repose sur des arguments d'analyse harmonique. Grâce à notre définition de  $G(\Omega)$ , on peut le formuler dans le cas où  $\Omega$  est borné. La preuve repose ici sur des arguments d'analyse fonctionnelle.

**Lemme 4.1.5.** *Soit  $f_n, n \geq 1$  une suite de fonctions dans  $L^q(\Omega) \cap G(\Omega)$  possédant les deux propriétés suivantes ( $\Omega$  est régulier à bord lipschitz) :*

1. *Il existe  $q > 2$  et  $C > 0$  telles que  $\|f_n\|_{L^q(\Omega)} \leq C$ .*
2. *La suite  $f_n$  converge vers 0 au sens des distributions (i.e. dans  $\mathbb{D}'(\Omega)$ ).*

*Alors  $\|f_n\|_G$  converge vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.*

Ce résultat explique pourquoi la norme dans  $G(\Omega)$  est une bonne norme pour étudier les signaux à fortes oscillations. Il sera en effet plus facile de capturer de tels signaux lors d'un processus de minimisation avec la norme  $G$  qu'avec la classique norme  $L^2$ .

**Preuve du Lemme 4.1.5 :** On sépare la preuve en deux étapes :

Etape 1 :

Considérons une suite  $f_n \in L^q(\Omega) \cap G(\Omega)$  satisfaisant l'hypothèse 1. On considère le problème de Neumann associé :

$$\begin{cases} \Delta u_n = f_n \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial u_n}{\partial N} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1.24)$$

On rappelle que comme  $f_n \in G(\Omega)$ , on a aussi  $\int_{\Omega} f_n dx = 0$ . On sait (cf [93, 136, 70]) que le problème (4.1.24) admet une solution  $u_n \in W^{2,q}(\Omega)$ . Mais comme  $q > 2$  et  $\Omega$  borné, il est standard (cf [42, 2]) qu'il existe  $\theta \in (0, 1)$  tel que  $W^{2,q}(\Omega)$  s'injecte continuellement dans  $C^{1,\theta}$  (grâce au théorème de Morrey). On note  $g_n = \nabla u_n$ . On a donc  $g_n \in C^{0,\theta}(\mathbb{R}^2)$ . De plus (cf [42, 2]), si  $x$  et  $y \in \Omega$ , on a :

$$|g_n(x) - g_n(y)| \leq A_1(\Omega, q, N) \|g_n\|_{W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^2)} |x - y|^{\theta} \quad (4.1.25)$$

où  $A_1(\Omega, q, N)$  est une constante qui ne dépend que de  $\Omega$ ,  $q$  et de la dimension de l'espace  $N = 2$ .

On considère à nouveau le problème (4.1.24). D'après [136, 135], on sait aussi qu'il existe un constante  $B > 0$  telle que :

$$\|u_n\|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq B \|f_n\|_{L^q(\Omega)} \quad (4.1.26)$$

Et comme on suppose que  $\|f_n\|_{L^q(\Omega)} \leq C$ , on obtient :

$$\|u_n\|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq B C \quad (4.1.27)$$

Mais comme  $g_n = \nabla u_n$ , on a  $\|g_n\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq \|u_n\|_{W^{2,q}(\Omega)}$ . On déduit donc de (4.1.27) que :

$$\|g_n\|_{W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^2)} \leq B C \quad (4.1.28)$$

Et on conclut grâce à (4.1.25) et (4.1.28) que pour tout  $x$  et tout  $y \in \Omega$ , on a :

$$|g_n(x) - g_n(y)| \leq A_2(\Omega, q, N) |x - y|^{\theta} \quad (4.1.29)$$

où  $A_2(\Omega, q, N)$  est une constante qui ne dépend que de  $\Omega$ ,  $q$ , et de la dimension de l'espace  $N = 2$ .

Etape 2 :

De (4.1.27) on déduit l'existence de  $u \in W^{2,q}(\Omega)$  tel qu'à une extraction près,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } W^{2,q}(\Omega) \text{ faible} \quad (4.1.30)$$

Et en utilisant l'injection compacte de  $W^{2,q}(\Omega)$  dans  $W^{1,q}(\Omega)$  (cf [2, 42]) :

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } W^{1,q}(\Omega) \text{ fort} \quad (4.1.31)$$

On multiplie maintenant l'équation (4.1.24) par une fonction  $\phi \in \mathbb{D}(\Omega)$  :

$$\int_{\Omega} \Delta u_n \phi dx = \int_{\Omega} f_n \phi dx \quad (4.1.32)$$

En intégrant par partie, on obtient

$$- \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \phi dx = \int_{\Omega} f_n \phi dx \quad (4.1.33)$$

et comme  $f_n \rightarrow 0$  dans  $\mathbb{D}'(\Omega)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on voit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \phi dx = 0 \quad (4.1.34)$$

Mais  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{1,q}(\Omega)$ , et donc :  $\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx = 0$ , i.e. :

$$-\int_{\Omega} \Delta u \phi \, dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathbb{D}(\Omega) \quad (4.1.35)$$

ce qui implique que  $\Delta u = 0$  dans  $\mathbb{D}'(\Omega)$ . Comme  $u$  est dans  $W^{2,q}(\Omega)$ , on a  $\Delta u \in L^q(\Omega)$ . Et donc  $\Delta u = 0$  dans  $L^q(\Omega)$ .

$$\int_{\Omega} \Delta u_n \phi \, dx = \int_{\Omega} f_n \phi \, dx \quad (4.1.36)$$

Comme  $\|f_n\|_{L^q(\Omega)} \leq C$ , il existe  $f \in L^q(\Omega)$  telle que à une extraction près,  $f_n \rightharpoonup f$  dans  $L^q(\Omega)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Et comme  $f_n$  converge vers 0 au sens des distributions, on a  $f = 0$ . D'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \Delta u_n \phi \, dx = 0$ . En intégrant par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u_n \phi \, dx &= \underbrace{\int_{\partial\Omega} \nabla u_n \cdot N \phi}_{=0 \text{ car } \frac{\partial u_n}{\partial N} = 0} - \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \phi \, dx \end{aligned} \quad (4.1.37)$$

Et puisque  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{1,q}(\Omega)$  :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathbb{D}(\bar{\Omega}) \quad (4.1.38)$$

Comme  $\Delta u = 0$  dans  $L^q(\Omega)$ , on a aussi  $\int_{\Omega} \Delta u \phi \, dx = 0$  si  $\phi$  dans  $\mathbb{D}(\bar{\Omega})$ . En utilisant à nouveau la formule de Stokes, on obtient :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial N} \phi = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx + \int_{\Omega} \Delta u \phi \, dx \quad (4.1.39)$$

On conclut que  $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial N} \phi = 0$  pour tout  $\phi$  dans  $\mathbb{D}(\bar{\Omega})$ . On en déduit alors (cf [160]) que  $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$  sur  $\partial\Omega$ . On a ainsi montré que  $u \in W^{2,q}(\Omega)$  est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial N} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1.40)$$

de sorte que  $\nabla u = 0$  dans  $L^2(\Omega)$ . Le raisonnement précédent restant valable pour toute sous-suite extraite de  $u_n$ , on conclut que toute la suite  $\nabla u_n$  est telle que  $\nabla u_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  dans  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$  fort, i.e.  $g_n = \nabla u_n \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$  fort. D'après le Lemme 4.1.2, on obtient que :

$$\|g_n\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)} \rightarrow 0 \quad (4.1.41)$$

Comme  $f_n = \operatorname{div} g_n$ , on déduit facilement de (4.1.41) que  $\|f_n\|_G \rightarrow 0$ .

■

**Exemple :** On donne ici un exemple de suite de fonctions  $f_n$  satisfaisant les hypothèses du Lemme 4.1.5.

Considérons la suite de fonctions  $f_n$  définie sur  $\Omega = (-\pi, \pi)^2$  par :

$$f_n(x, y) = \cos(nx) + \cos(ny) = \operatorname{div} \left( \frac{1}{n} (\sin(nx), \sin(ny)) \right) \quad (4.1.42)$$

On définit donc

$$\xi_n(x, y) = \frac{1}{n}(\sin(nx), \sin(ny)) \quad (4.1.43)$$

On a  $\xi_n \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$ . De plus, on voit facilement que  $\xi_n \cdot N = 0$  sur  $\partial\Omega$  pour tout  $n > 0$ . Donc  $f_n \in G(\Omega)$ , et on a clairement :

$$\|f_n\|_{G(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty \quad (4.1.44)$$

Maintenant, soit  $\phi \in \mathbb{D}(\Omega)$ . En utilisant la formule de Stokes, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi f_n \, dx dy &= \int_{\Omega} \phi \operatorname{div}(\xi_n) \, dx dy \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \xi_n \, dx dy + \int_{\partial\Omega} \phi \underbrace{\xi_n \cdot N}_{=0 \text{ sur } \partial\Omega} \end{aligned}$$

Mais

$$\left| \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \xi_n \, dx dy \right| \leq \|\nabla \phi\|_{L^1(\Omega)} \underbrace{\|\xi_n\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)}}_{\rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty} \quad (4.1.45)$$

On conclut ainsi que  $f_n \rightarrow 0$  dans  $\mathbb{D}'(\Omega)$ .

On peut calculer  $\|f_n\|_{L^3(\Omega)}^3$  :

$$\|f_n\|_{L^3(\Omega)} = \left( \frac{104\pi}{3} \right)^{1/3} \quad (4.1.46)$$

Cet exemple montre que le résultat du Lemme 4.1.5 n'est pas trivial. Et il confirme que l'espace  $G$  est un espace bien adapté pour les signaux fortement oscillants (surtout par rapport à  $L^2$ ).

## 4.2 . Etude du modèle de Meyer

Grâce aux résultats de la Section 4.1, nous sommes désormais en position de mener l'étude mathématique du problème de Meyer [133]. Si au chapitre précédent (dans le cas discret), l'existence d'une solution était immédiate, il faut ici être plus précis.

Soit  $f \in L^2(\Omega)$ . On rappelle qu'on considère le problème suivant :

$$\inf_{(u,v) \in BV(\Omega) \times G(\Omega) / f=u+v} (J(u) + \alpha \|v\|_{G(\Omega)}) \quad (4.2.1)$$

où  $J(u)$  est la variation totale de  $|Du|$  définie par (2.1.1).

**Remarque :** Comme  $f$  est une image, il n'est pas restrictif de supposer  $f \in L^2(\Omega)$ .

Avant de considérer le problème (4.2.1), on doit d'abord montrer qu'il est toujours possible de décomposer une fonction  $f \in L^2(\Omega)$  en deux composantes  $(u, v) \in BV(\Omega) \times G(\Omega)$ .

**Lemme 4.2.1.** *Soit  $f \in L^2(\Omega)$ . Il existe alors  $u \in BV(\Omega)$  et  $v \in G(\Omega)$  tels que  $f = u + v$ .*

**Preuve :** On choisit  $u = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f$  et  $v = f - u = f - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f$ . On a donc  $u \in BV(\Omega)$  (puisque  $\Omega$  est borné), et  $v \in L^2(\Omega)$ . De plus, comme  $\int_{\Omega} v = 0$ , on déduit de la Proposition 4.1.19 que  $v \in G(\Omega)$ . ■

On montre maintenant que le problème (4.2.1) admet au moins une solution.

**Proposition 4.2.1.** *Soit  $f \in L^2(\Omega)$ . Il existe alors  $\hat{u} \in BV(\Omega)$  et  $\hat{v} \in G(\Omega)$  tels que  $f = \hat{u} + \hat{v}$ , et :*

$$J(\hat{u}) + \alpha \|\hat{v}\|_G = \inf_{(u,v) \in BV(\Omega) \times G(\Omega) / f=u+v} (J(u) + \alpha \|v\|_G) \quad (4.2.2)$$

**Preuve :** On commence par remarquer que la fonctionnelle à minimiser (4.2.1) est convexe par rapport à ses deux variables. De plus, l'infimum dans (4.2.1) est fini (d'après le Lemme 4.2.1).

On considère maintenant  $(u_n, v_n)$  une suite minimisante pour (4.2.1). Il existe donc une constante  $C$  telle que :

$$J(u_n) \leq C \text{ et } \|v_n\|_G \leq C \quad (4.2.3)$$

D'après l'inégalité de Poincaré (cf [8]), on sait qu'il existe une constante  $B > 0$  telle que :  $\|u_n - \int_{\Omega} u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq BJ(u_n)$ . De (4.2.3), on obtient donc  $\|u_n - \int_{\Omega} u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq BC$ . Mais comme  $u_n + v_n = f$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_n + \underbrace{\int_{\Omega} v_n}_{=0 \text{ car } v_n \in G(\Omega)} &= \int_{\Omega} f \\ &= \int_{\Omega} f \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

D'où  $u_n$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$ . De (4.2.3), on déduit que  $u_n$  est bornée dans  $BV(\Omega)$ . Il existe donc  $\hat{u} \in BV(\Omega)$  telle que  $u_n \rightharpoonup \hat{u}$  dans  $BV(\Omega)$  faible \*. Et comme  $u_n + v_n = f$ , on déduit que  $v_n$  est aussi bornée dans  $L^2(\Omega)$ . Il existe donc  $\hat{v} \in L^2(\Omega)$  telle que, à une extraction près,  $v_n \rightharpoonup \hat{v}$  dans  $L^2(\Omega)$  faible.

Pour conclure, il reste à montrer que  $(\hat{u}, \hat{v})$  est un minimiseur de  $J(u) + \alpha \|v\|_{G(\Omega)}$ . Et ce dernier point se déduit du fait que  $J$  est semi-continu inférieurement (sci) par rapport à la topologie  $BV$  faible \* [8], et du fait que  $\|\cdot\|_G$  est sci par rapport à la topologie  $L^2$ -faible. ■

On a donc montré que le modèle de Meyer admet dans le cadre continu au moins une solution.

**Remarque :** L'unicité pour le problème de Meyer reste une question ouverte.

## 4.3 . Algorithme

Dans la Section 4.2, nous avons montré l'existence d'une solution pour le modèle de Meyer. On étudie maintenant l'algorithme proposé au chapitre 3 pour résoudre le modèle de Meyer (dans le cadre continu que nous venons d'introduire). Les résultats de cette section généralisent au cas continu les résultats de la sections 3.3 obtenus dans un cadre discret. Nous montrons donc d'une part que l'algorithme converge vers le minimiseur de notre fonctionnelle, et d'autre part que résoudre notre problème permet bien de résoudre le modèle de Meyer.

### 4.3.1 Modèle en continu

On introduit la fonctionnelle suivante définie sur  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  :

$$F_{\lambda,\mu}(u, v) = \begin{cases} J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|_{L^2(\Omega)}^2 & \text{si } (u, v) \in BV(\Omega) \times G_\mu(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.3.1)$$

On peut réécrire  $F_{\lambda,\mu}$  de la manière suivante :

$$F_{\lambda,\mu}(u, v) = J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \chi_{G_\mu(\Omega)}(v) \quad (4.3.2)$$

avec la convention que  $J(u) = +\infty$  si  $u \in L^2(\Omega) \setminus BV(\Omega)$ , et où  $\chi_{G_\mu(\Omega)}$  est la fonction indicatrice de  $G_\mu(\Omega)$ .

On veut résoudre le problème suivant :

$$\inf_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} F_{\lambda,\mu}(u, v) \quad (4.3.3)$$

### 4.3.2 Existence et unicité

On montre ici que le problème (4.3.3) admet une unique solution.

**Proposition 4.3.1.** *Soit  $f \in L^2(\Omega)$ . Il existe un unique couple  $(\hat{u}, \hat{v})$  qui minimise  $F_{\lambda,\mu}(u, v)$  sur  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .*

**Preuve :** On sépare la preuve en deux parties.

Etape 1 (Unicité) : La preuve est identique à celle de l'unicité pour le Lemme 3.3.1.

Etape 2 (Existence) : Soit  $(u_n, v_n)$  une suite minimisante pour  $F_{\lambda,\mu}(u, v)$ , i.e. :

$$F_{\lambda,\mu}(u_n, v_n) \rightarrow \inf_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} F_{\lambda,\mu}(u, v) \quad (4.3.4)$$

Il est clair que  $v_n \in G_\mu$  et :

$$J(u_n) \leq C \text{ et } \|f - u_n - v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \quad (4.3.5)$$

Comme  $v_n \in G_\mu$ , on obtient que  $v_n = \operatorname{div} \xi_n$ , avec  $\xi_n$  tel que  $\|\xi_n\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)} \leq \mu$  et  $\xi_n \cdot N = 0$  sur  $\partial\Omega$ . On a aussi :

$$\int_{\Omega} u_n v_n = \int_{\Omega} u_n \operatorname{div} \xi_n \leq \sup_{\xi \in G_\mu(\Omega)} \int_{\Omega} u_n \operatorname{div} \xi \leq \mu \sup_{\xi \in G_1(\Omega)} \int_{\Omega} u_n \operatorname{div} \xi \quad (4.3.6)$$

D'où (en utilisant (4.3.5)) :

$$\int_{\Omega} u_n v_n \leq \mu J(u_n) \leq C \quad (4.3.7)$$

De (4.3.5) et (4.3.7), on déduit que  $u_n$  et  $v_n$  sont bornés dans  $L^2(\Omega)$ . Grâce à (4.3.5), et puisque  $u_n$  et  $v_n$  sont bornés dans  $L^2(\Omega)$ , on obtient qu'il existe  $(\hat{u}, \hat{v})$  tels que, à une extraction près :  $u_n \rightharpoonup \hat{u}$  dans  $BV(\Omega)$  faible \*, et  $v_n \rightharpoonup \hat{v}$  dans  $L^2(\Omega)$  faible.

D'après le Lemme 4.1.3, on sait que  $\chi_{G_\mu(\Omega)}$  est  $L^2$ -faible sci, où :

$$\chi_{G_\mu(\Omega)}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in G_\mu(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.3.8)$$



Puisque la variation totale est sci pour la topologie  $BV$  faible  $*$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \inf F_{\lambda,\mu} &= \underline{\lim} \left( J(u_n) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u_n - v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \chi_{G_\mu(\Omega)}(v_n) \right) \\ &\geq J(\hat{u}) + \frac{1}{2\lambda} \|f - \hat{u} - \hat{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \chi_{G_\mu(\Omega)}(\hat{v}) \end{aligned}$$

i.e.  $(\hat{u}, \hat{v})$  est un minimiseur de  $F_{\lambda,\mu}(u, v)$  sur  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

■

### 4.3.3 Caractérisation du minimiseur $(\hat{u}, \hat{v})$

Maintenant que l'on sait qu'une solution existe, on cherche un moyen de l'atteindre. Le résultat suivant donne une caractérisation du minimiseur de  $F_{\lambda,\mu}$ . On l'utilisera dans la sous-section suivante pour montrer la convergence de l'algorithme (3.2.10)–(3.2.12) proposé au chapitre précédent.

**Proposition 4.3.2.**  *$(\hat{u}, \hat{v})$  est un minimiseur de  $F_{\lambda,\mu}(u, v)$  si et seulement si :*

$$\begin{cases} \hat{u} = f - \hat{v} - P_{G_\lambda(\Omega)}(f - \hat{v}) \\ \hat{v} = P_{G_\mu(\Omega)}(f - \hat{u}) \end{cases} \quad (4.3.9)$$

**Preuve :** On sépare la preuve en deux parties :

Etape 1 (Condition nécessaire) :

Soit  $(\hat{u}, \hat{v})$  un minimiseur de  $F_{\lambda,\mu}(u, v)$ . Le fait que  $\hat{u} = f - \hat{v} - P_{G_\lambda(\Omega)}(f - \hat{v})$  vient de la Proposition 2.1.1. La preuve de  $\hat{v} = P_{G_\mu(\Omega)}(f - \hat{u})$  est similaire : comme  $\hat{v}$  est un minimiseur de  $F_{\lambda,\mu}(\hat{u}, \cdot)$ , on a pour tout  $v$  dans  $L^2(\Omega)$  :  $F_{\lambda,\mu}(\hat{u}, \hat{v}) \leq F_{\lambda,\mu}(\hat{u}, v)$ , ce qui implique :

$$0 \in \hat{v} - (f - \hat{u}) + \lambda \partial \chi_{G_\mu(\Omega)}(\hat{v}) \quad (4.3.10)$$

(4.3.10) signifie :  $f - \hat{u} \in (I + \lambda \partial \chi_{G_\mu(\Omega)})(\hat{v})$ . D'où :  $\hat{v} = (I + \lambda \partial \chi_{G_\mu(\Omega)})^{-1}(f - \hat{u})$ . Et il est standard de conclure que :  $\hat{v} = P_{G_\mu(\Omega)}(f - \hat{u})$ .

Etape 2 (Condition suffisante) : Soit  $(\hat{u}, \hat{v})$  vérifiant (4.3.9). On a donc :

$$\begin{cases} 0 \in \hat{u} + \hat{v} - f + \lambda \partial J(\hat{u}) \\ 0 \in \hat{u} + \hat{v} - f + \lambda \partial \chi_{G_\mu(\Omega)}(\hat{v}) \end{cases} \quad (4.3.11)$$

La première ligne de (4.3.11) provient du fait que  $\hat{u} = f - \hat{v} - P_{G_\lambda(\Omega)}(f - \hat{v})$  (cf [49] et [25]), et la seconde du fait que :  $\hat{v} = P_{G_\mu(\Omega)}(f - \hat{u})$ . On peut réécrire (4.3.11) :

$$\begin{cases} \frac{f - \hat{u} - \hat{v}}{\lambda} \in \partial J(\hat{u}) \\ \frac{f - \hat{u} - \hat{v}}{\lambda} \in \partial \chi_{G_\mu(\Omega)}(\hat{v}) \end{cases} \quad (4.3.12)$$

ce qui signifie :

$$\begin{cases} J(u) \geq J(\hat{u}) + \left(u - \hat{u}, \frac{f - \hat{u} - \hat{v}}{\lambda}\right)_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} \\ \chi_{G_\mu(\Omega)}(v) \geq \chi_{G_\mu(\Omega)}(\hat{v}) + \left(v - \hat{v}, \frac{f - \hat{u} - \hat{v}}{\lambda}\right)_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} \end{cases} \quad (4.3.13)$$

On additionne les deux lignes dans (4.3.13), et on obtient :

$$J(u) + \chi_{G_\mu(\Omega)}(v) \geq J(\hat{u}) + \chi_{G_\mu(\Omega)}(\hat{v}) + \left(u - \hat{u}, \frac{f - \hat{u} - \hat{v}}{\lambda}\right) + \left(v - \hat{v}, \frac{f - \hat{u} - \hat{v}}{\lambda}\right) \quad (4.3.14)$$

On ajoute alors  $\frac{1}{2\lambda}\|f - u - v\|_{L^2(\Omega)}^2$  aux deux membres de (4.3.14), et on obtient :

$$\begin{aligned} F_{\lambda,\mu}(u, v) &\geq F_{\lambda,\mu}(\hat{u}, \hat{v}) - \frac{1}{2\lambda}\|f - \hat{u} - \hat{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\lambda}\|f - u - v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \left(u - \hat{u}, \frac{f - \hat{u} - \hat{v}}{\lambda}\right) + \left(v - \hat{v}, \frac{f - \hat{u} - \hat{v}}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Pour conclure, il reste à montrer que :

$$\|f - u - v\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|f - \hat{u} - \hat{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2(u - \hat{u}, f - \hat{u} - \hat{v}) + 2(v - \hat{v}, f - \hat{u} - \hat{v}) \geq 0 \quad (4.3.15)$$

On note  $L(u, v) = \|f - u - v\|_{L^2(\Omega)}^2$ . Comme  $L$  est convexe, on a :

$$L(u, v) \geq L(\hat{u}, \hat{v}) + \left(u - \hat{u}, \frac{\partial L}{\partial u}(\hat{u}, \hat{v})\right) + \left(v - \hat{v}, \frac{\partial L}{\partial v}(\hat{u}, \hat{v})\right) \quad (4.3.16)$$

Et (4.3.16) est juste (4.3.15) qu'on voulait montrer. ■

**Corollaire 4.3.1.** *La suite  $(u_n, v_n)$  (définie par (3.2.9)-(3.2.12) et adaptée au cadre continu) converge faiblement vers  $(\hat{u}, \hat{v}) \in BV(\Omega) \times G_\mu(\Omega)$ , l'unique minimiseur de  $F_{\lambda,\mu}(u, v)$ .*

**Preuve :** C'est une conséquence des Proposition 4.3.1 et 4.3.2, ainsi que de la définition de la suite  $(u_n, v_n)$  (définie par (3.2.9)-(3.2.12)). ■

On a donc montré la convergence de l'algorithme vers le minimiseur de notre fonctionnelle. Il reste maintenant à montrer que résoudre notre problème permet bien de résoudre le problème de Meyer. On commence par regarder le problème limite lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ .

#### 4.3.4 Etude du problème limite lorsque $\lambda \rightarrow 0$

On considère le problème suivant :

$$\inf_{(u,v) \in BV(\Omega) \times G(\Omega)/f=u+v} J(u) + \chi_{G_\mu}(v) \quad (4.3.17)$$

Dans la proposition suivante, on montre que le problème (4.3.17) est le problème limite que l'on obtient lorsque  $\lambda \rightarrow 0$  dans (4.3.3).

**Proposition 4.3.3.** *Supposons que  $f \in L^2(\Omega)$ , et qu'il existe  $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in BV(\Omega) \times G_\mu(\Omega)$  tel que  $f = \tilde{u} + \tilde{v}$ , alors :*

1. *Il existe  $(\hat{u}, \hat{v}) \in BV(\Omega) \times G_\mu(\Omega)$  solution de (4.3.17).*
2. *De plus, si  $(\hat{u}, \hat{v})$  est unique, et si  $(u_\lambda, v_\lambda)$  désigne la solution du problème (4.3.3), alors  $(u_\lambda, v_\lambda)$  converge vers  $(\hat{u}, \hat{v}) \in BV(\Omega) \times G_\mu(\Omega)$  lorsque  $\lambda$  tend vers 0.*

**Preuve :** Comme on suppose l'existence de  $(\tilde{u}, \tilde{v})$ , l'infimum dans (4.3.17) est fini. En utilisant le Lemme 4.1.3, la preuve du premier point est alors immédiate. Concentrons nous maintenant sur le deuxième point. L'existence et l'unicité de  $(u_\lambda, v_\lambda)$  sont donnés par la Proposition 4.3.1. Comme  $(u_\lambda, v_\lambda)$  est la solution du problème (4.3.3), on a  $v_\lambda \in G_\mu$ , et :  $F_{\lambda,\mu}(u_\lambda, v_\lambda) \leq F_{\lambda,\mu}(\hat{u}, \hat{v})$ , ce qui signifie (car  $\hat{u} + \hat{v} = f$ )

$$F_{\lambda,\mu}(u_\lambda, v_\lambda) \leq J(\hat{u}) \quad (4.3.18)$$

Et le terme de gauche de (4.3.18) est donné par :

$$F_{\lambda,\mu}(u_\lambda, v_\lambda) = J(u_\lambda) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u_\lambda - v_\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2 + \chi_{G_\mu}(v_\lambda) = J(u_\lambda) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u_\lambda - v_\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (4.3.19)$$

D'où

$$J(u_\lambda) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u_\lambda - v_\lambda\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq J(\hat{u}) \quad (4.3.20)$$

ce qui implique

$$\|f - u_\lambda - v_\lambda\|^2 \leq 2\lambda J(\hat{u}) \quad (4.3.21)$$

On montre alors comme dans la preuve de la Proposition 4.3.1 que si  $\lambda \in [0; 1]$ ,  $\|u_\lambda\|_{L^2(\Omega)}$  et donc  $\|v_\lambda\|_{L^2(\Omega)}$  sont bornés par une constante  $C > 0$  qui ne dépend pas de  $\lambda$ .

Considérons une suite  $(\lambda_n)$  qui tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Alors, à une extraction près, il existe  $(u_0, v_0) \in BV(\Omega) \times G_\mu(\Omega)$  tel que  $(u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n})$  converge vers  $(u_0, v_0)$  dans  $L^2(\Omega)$  faible. En passant à la limite dans (4.3.21), on obtient :  $\|f - u_0 - v_0\|_{L^2(\Omega)} = 0$ , i.e.  $f = u_0 + v_0$ .

Pour conclure la preuve de la proposition, il reste à montrer que  $(u_0, v_0)$  est solution du problème (4.3.17). On commence par remarquer que puisque pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $\|v_\lambda\|_G \leq \mu$ , on obtient donc grâce au Lemme 4.1.3 que  $v_0 \in G_\mu$ . Et d'après (4.3.20), on a pour tout  $\lambda > 0$  :  $J(u_\lambda) \leq J(\hat{u})$ . D'où  $u_0 \in BV(\Omega)$  (car  $J(u_0) \leq \liminf J(u_\lambda) \leq J(\hat{u})$ ).

Soit  $(u, v) \in BV(\Omega) \times G_\mu(\Omega)$  tel que  $f = u + v$ . On a :

$$\begin{aligned} J(u) + \chi_{G_\mu}\left(\frac{v}{\mu}\right) + \frac{1}{2\lambda} \underbrace{\|f - u - v\|^2}_{=0} &\geq J(u_{\lambda_n}) + \chi_{G_\mu}\left(\frac{v_{\lambda_n}}{\mu}\right) + \frac{1}{2\lambda_n} \|f - u_{\lambda_n} - v_{\lambda_n}\|^2 \\ &\geq J(u_{\lambda_n}) + \chi_{G_\mu}\left(\frac{v_{\lambda_n}}{\mu}\right) \end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ , on obtient :  $J(u) + \chi_{G_\mu}\left(\frac{v}{\mu}\right) \geq J(u_0) + \chi_{G_\mu}\left(\frac{v_0}{\mu}\right)$ . D'où  $(u_0, v_0)$  est une solution du problème (4.3.17). Et comme on a supposé que le problème (4.3.17) possède une unique solution, on déduit que  $(u_0, v_0) = (\hat{u}, \hat{v})$ , i.e.  $(u_0, v_0)$  est la solution du problème (4.3.17). ■

### 4.3.5 Lien entre le problème limite et le modèle de Meyer

On veut maintenant montrer le lien entre (4.3.17) et (4.2.1).

**Proposition 4.3.4.** *On fixe  $\alpha > 0$  dans le problème (4.2.1). Soit  $(\hat{u}, \hat{v})$  une solution du problème (4.2.1). On fixe  $\mu = \|\hat{v}\|_G$  dans (4.3.17). Alors :*

- $(\hat{u}, \hat{v})$  est aussi une solution du problème (4.3.17).
- Réciproquement, toute solution  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  de (4.3.17) (avec  $\mu = \|\hat{v}\|_G$ ) est une solution de (4.2.1). De plus, on a  $\|\tilde{v}\| = \mu$  et  $J(\tilde{u}) = J(\hat{u})$ .

**Preuve :** La preuve est exactement la même que celle de la Proposition 3.3.3. ■

En fait, comme dans le cas discret du Chapitre 3, on peut dire plus à propos du lien entre le modèle de Meyer (4.2.1) et notre problème limite (4.3.17). On note

$$H_\alpha(u, v) = J(u) + \alpha \|v\|_G \quad (4.3.22)$$

On peut donc écrire le modèle de Meyer comme :

$$\inf_{(u,v) \in BV(\Omega) \times G(\Omega) / f=u+v} H_\alpha(u, v) \quad (4.3.23)$$

$\alpha$  étant fixé, on note

$$Z_\alpha = \{v_\alpha, v_\alpha \text{ est une solution du problème } \inf_{v \in G(\Omega)} H_\alpha(f - v, v)\} \quad (4.3.24)$$

$$S_\alpha = \{\|v_\alpha\|_G, v_\alpha \text{ est une solution du problème } \inf_{v \in G(\Omega)} H_\alpha(f - v, v)\} \quad (4.3.25)$$

On sait que  $Z_\alpha$  et  $S_\alpha$  ne sont pas vides d'après la Proposition 4.2.1.

On considère les deux multi-applications  $Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{P}(G(\Omega))$  (resp.  $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+)$ ) tel que  $Y(\alpha) = Z_\alpha$  (resp.  $T(\alpha) = S_\alpha$ ), où  $\mathbb{P}(G(\Omega))$  (resp.  $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+)$ ) désigne l'ensemble des sous-ensembles de  $G(\Omega)$  (resp.  $\mathbb{R}_+$ ).

On veut montrer une sorte de réciproque à la Proposition 4.3.4, i.e. que, pour certaines valeurs de  $\mu$ , il existe  $\alpha$  tel que  $\mu \in T(\alpha)$ . On a le résultat suivant :

**Proposition 4.3.5.**

1.  $T$  est une multi-application décroissante.
2.  $Y(0) = \{f - \bar{f}\}$  et  $T(0) = \|f - \bar{f}\|_G$  (où  $\bar{f}$  désigne la valeur moyenne de  $f$  sur  $\Omega$ ).
3. Si  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ , alors  $T(v_\alpha)$  tend vers  $\{a\}$ , où  $a$  est défini par :

$$a = \inf \{\|v\|_G / f - v \in BV(\Omega), v \in G(\Omega)\} \quad (4.3.26)$$

**Remarque :** Si  $f \in BV(\Omega)$ , alors  $a = 0$ .

**Preuve :** On montre successivement les trois points de la proposition.

1. La preuve du premier point est identique à celle de la Proposition 3.3.4.
2. Regardons maintenant le deuxième point de la proposition.

On a (cf (4.3.22))  $H_0(f - v, v) = J(f - v) \geq 0$  pour tout  $v \in G(\Omega)$ . En choisissant  $v_0 = f - \bar{f}$  (d'après la Proposition 4.1.1),  $v_0 \in G(\Omega)$  car  $\bar{v}_0 = 0$ ), on obtient  $H_0(f - v_0, v_0) = J(f - v_0) = J(\bar{f}) = 0$ . D'où  $0 = \inf_{v \in G(\Omega)} H_0(f - v, v)$ , et  $v_0 \in Z_0$ . De plus,  $J(u) = 0$  si et seulement si  $u = \bar{u}$ . Soit  $v_1$  une solution de  $\inf_{v \in G(\Omega)} H_0(f - v, v)$ . On a donc  $\overline{f - v_1} = f - v_1$ . et comme  $v_1 \in G(\Omega)$ , on a aussi  $\bar{v}_1 = 0$ . Alors  $f - v_1 = \overline{f - v_1} = \bar{f} - \bar{v}_1 = \bar{f}$ , i.e.  $v_1 = v_0$ . On conclut que  $\{v_0\} = Z_0$ .

3. Montrons maintenant le troisième point de la proposition.

Soit  $\epsilon > 0$ . De (4.3.26), on sait qu'il existe  $\hat{v}_\epsilon \in G(\Omega)$  tel que  $\hat{u}_\epsilon = f - \hat{v}_\epsilon \in BV(\Omega)$  et :

$$a \leq \|\hat{v}_\epsilon\|_G \leq a + \epsilon \quad (4.3.27)$$

On prend  $v_\alpha$  dans  $Z_\alpha$ , et on note  $u_\alpha = f - v_\alpha$ . Par définition de  $Z_\alpha$ , on a pour tout  $(u, v) \in BV(\Omega) \times G(\Omega)$  tel que  $f = u + v : J(u_\alpha) + \alpha \|v_\alpha\|_G \leq J(u) + \alpha \|v\|_G$ . En choisissant  $u = \hat{u}_\epsilon$ , et  $v = \hat{v}_\epsilon$ , on obtient :

$$J(u_\alpha) + \alpha \|v_\alpha\|_G \leq J(\hat{u}_\epsilon) + \alpha \|\hat{v}_\epsilon\|_G \leq J(\hat{u}_\epsilon) + \alpha a + \alpha \epsilon \quad (4.3.28)$$

En passant à la limite  $\alpha \rightarrow +\infty$ , et en utilisant (4.3.27), on obtient :

$$a \leq \liminf_{\alpha \rightarrow +\infty} \|v_\alpha\|_G \leq a + \epsilon \quad (4.3.29)$$

■

**Remarque :** En fait, on a montré que  $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow [a, \|f - \bar{f}\|_G]$ . En particulier, les valeurs de  $T$  sont uniformément bornées :

1.  $T(0) = \{\|f - \bar{f}\|_G\}$
2. Si  $\alpha \geq 0$ , alors si  $v_\alpha \in Y(\alpha)$ , on a

$$\|v_\alpha\|_G \leq \|f - \bar{f}\|_G \quad (4.3.30)$$

**Proposition 4.3.6.**  *$T$  est s.c.s. (semi-continu supérieurement) (i.e  $T$  est de graphe fermé, à valeurs convexes compactes).*

**Preuve :** La preuve est identique à celle de la Proposition 3.3.5.

■

**Corollaire 4.3.2.** *Pour tout  $\mu$  dans  $(a, \|f - \bar{f}\|_G)$ , on peut trouver  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}_+$  tel qu'il existe  $(u, v)$  dans  $BV(\Omega) \times G(\Omega)$  avec  $\|v\|_G = \mu$  et solution du problème de Meyer (4.2.1).*

**Remarques :**

1. Le corollaire 4.3.2 complète le résultat de la Proposition 4.3.4. Il termine complètement le lien entre le problème de Meyer (4.2.1) et notre problème limite (4.3.17).
2. Des résultats des sous-sections 4.3.4 et 4.3.5, on déduit que le problème (4.3.3) consitue un bon moyen pour approcher le problème de Meyer.

## 4.4 . Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné une définition de l'espace  $G$  introduit par Meyer [133] dans le cas d'un ouvert  $\Omega$  borné. Il s'agit en effet du cadre théorique adapté au traitement d'images. Nous avons montré que cette nouvelle définition (Définition 4.1.2) convient bien aux signaux oscillants. Et dans ce cadre, nous avons pu effectuer l'étude de l'algorithme de décomposition  $u + v$  que nous avons introduit au Chapitre 3.

# Chapitre 5

## Applications

Dans ce chapitre, nous montrons deux applications de l'algorithme de décomposition  $u + v$  que nous avons introduit au Chapitre 3. Dans la Section 5.1, nous commençons par montrer une application en restauration d'image RSO, la norme  $G$  étant particulièrement bien adaptée au bruit de chatolement présent sur de telles images. Dans la Section 5.2, nous présentons ensuite une application de notre algorithme de décomposition en compression d'images. Dans cette approche, nous décomposons l'image à compresser avec l'algorithme  $u + v$  en deux composantes, la première contenant l'information géométrique de l'image, et la seconde l'information texture, puis nous effectuons la compression de chacune des composantes avec un algorithme de compression adapté à la nature de son contenu. Cette nouvelle approche s'avère plus performante que les méthodes standards, et est donc particulièrement efficace.

Nous avons présenté l'application en imagerie RSO dans [24, 25, 26], et celle en compression d'images dans [29, 30].

### 5.1 . Restauration d'images RSO

#### 5.1.1 Introduction

Le bruit des images RSO est un bruit de chatolement (speckle), dont la modélisation est étudiée en détails dans l'annexe C.

Un radar émet une onde cohérente, et on obtient une image à partir de l'onde réfléchie qu'il reçoit en retour [113, 101, 140].

Lorsque l'on observe la réflexion d'une onde cohérente sur une surface rugueuse, on constate que l'image observée est perturbée par un bruit particulièrement important. Cela se manifeste par un aspect granuleux de l'image. C'est pourquoi on donne le nom de speckle ou chatolement à ce phénomène.

**Difficulté du problème :** Pour illustrer la difficulté du problème, nous avons effectué des coupes dans des images fournies par le CNES (voir figure 5.1).

**Bruit multiplicatif :** Une démarche classique pour étudier la distribution de l'image RSO en présence de texture consiste à faire une modélisation multiplicative de l'image [161, 141,

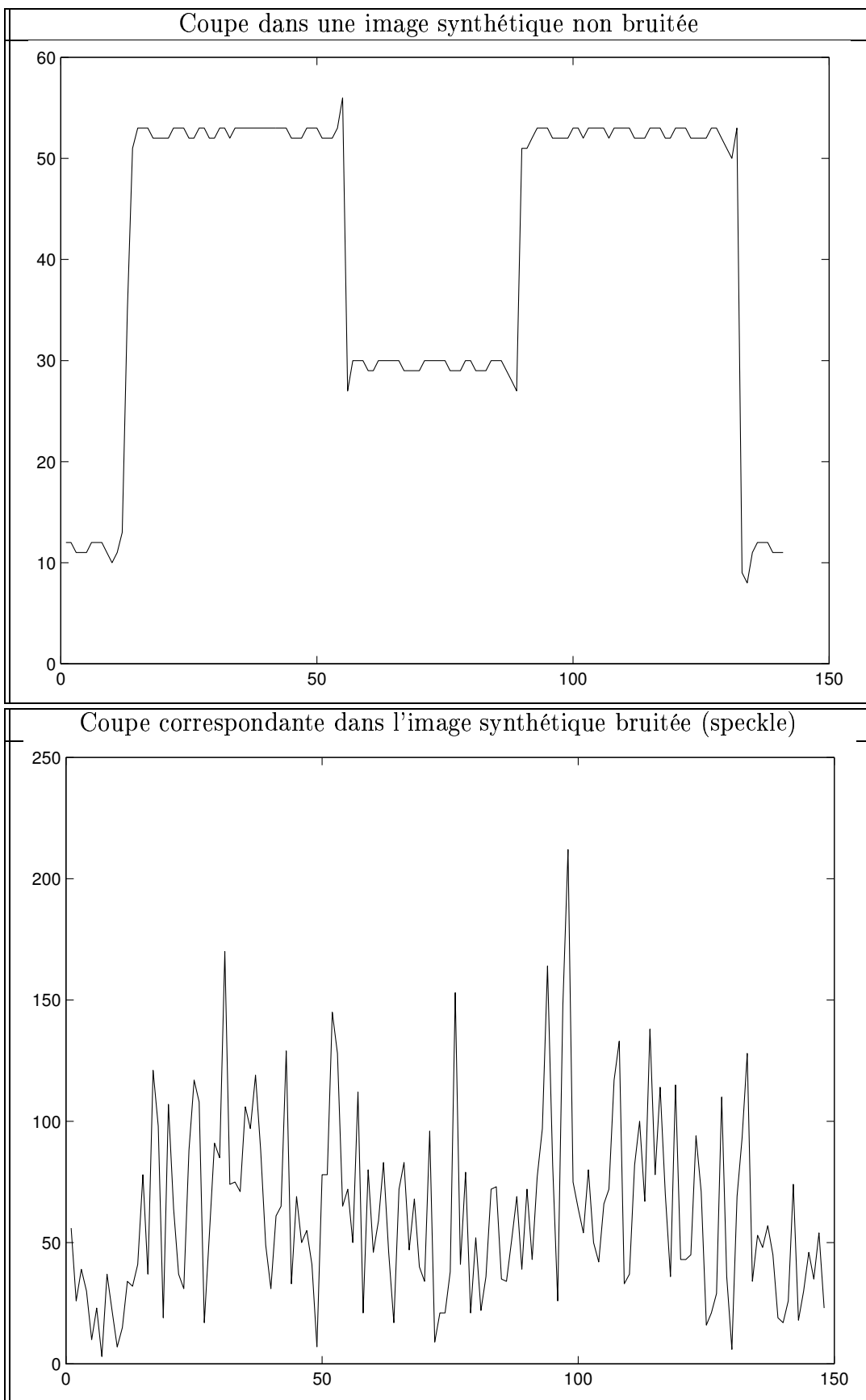


FIG. 5.1 – Bruit de chatoiement sur un signal 1-D

162], sous la forme  $I=RS$ , où  $I$  est l'intensité lumineuse observée,  $R$  la réflectivité de la scène, et  $S$  le speckle. On suppose de plus que  $R$  et  $S$  sont indépendantes.

En reprenant nos notations, cela revient à décomposer l'image  $f$  en  $f = uv$ .

**Lien avec notre approche :** Dans notre modèle, le bruit est considéré comme additif : on décompose l'image  $f$  en une composante  $u$  dans  $BV$ , et une composante  $v$  dans  $G$ . Mais il faut bien voir que cela n'a rien à voir avec les modèles additifs classiques : dans ces derniers,  $v$  est souvent considéré comme un bruit gaussien, et n'a donc qu'une faible amplitude. Ici,  $v$  appartient à  $G$ , espace dans lequel les signaux à fortes oscillations peuvent avoir une norme faible. Comme le rappelle le lemme 2.2.1, un signal  $v$  dans  $G$  peut avoir une grande norme  $L^q$  ( $q > 2$ ), et pourtant sa norme dans  $G$  peut être quasiment nulle.

### 5.1.2 Résultats sur des images synthétiques

**Restauration :** Les figures 5.2, 5.3 et 5.4 montrent l'intérêt pour une image RSO de la décomposition proposée par Meyer. En effet, on vérifie bien que la composante  $v$  contient le bruit de speckle. Et la composante  $u$  constitue en fait une version restaurée de l'image initiale.

Il n'est pas facile de faire des comparaisons avec d'autres méthodes, car le critère déterminant reste l'interprétation visuelle. Néanmoins, les résultats que nous obtenons nous paraissent de qualité tout à fait comparable par rapport aux méthodes existantes. Et surtout, notre approche étant variationnelle, le temps de calcul est beaucoup plus court que pour des approches stochastiques. Avec un processeur tournant à 800 MHz et disposant de 128 M de RAM, il nous faut moins d'une minute pour traiter une image  $256 \times 256$ .

**Classification :** Nous présentons à chaque fois un résultat de classification supervisée. Dans le cas de la figure 5.2, il suffit de faire une classification par seuillage pour obtenir une classification quasi-parfaite.

Dans le cas de la figure 5.4, on utilise l'algorithme de classification introduit dans [151]. Cet algorithme a été développé pour faire de la classification d'images optiques. Chaque classe est caractérisée par son niveau de gris moyen, ainsi que son écart-type, et suit une distribution gaussienne. Un tel modèle s'applique donc particulièrement bien pour faire de la classification sur les composantes géométriques  $u$  obtenues.

### 5.1.3 Images réelles

Nous utilisons ici des images de la région de Bourges (cf Figure 5.5) extraite du CD-ROM "R & T CNES OT/403\*03" *Filtrage d'images SAR* (1999). L'image de référence est une image obtenue par sommation en amplitude de plusieurs images (c'est la méthode la plus efficace, mais aussi la plus coûteuse pour réduire le speckle).

La Figure 5.6 montre l'effet du paramètre  $\mu$  sur la restauration. Plus  $\mu$  est grand, et plus  $v$  contient d'information, et donc plus  $u$  est moyennée. Suivant sa valeur, on peut donc obtenir une image plus ou moins restaurée, et également plus ou moins lissée. Ici, les images de classification sont obtenues par seuillage.



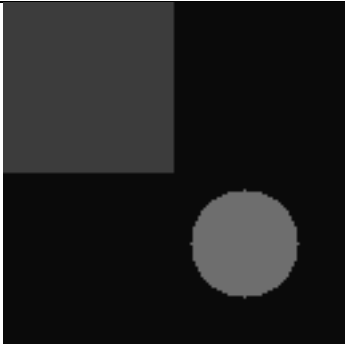
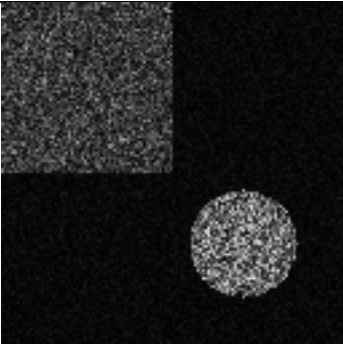
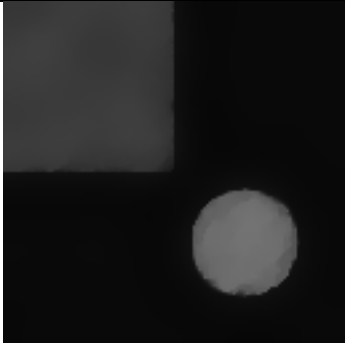
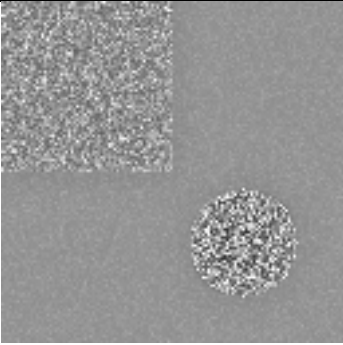
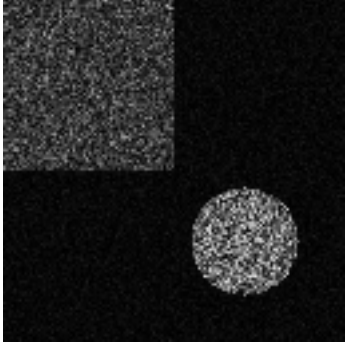

Image de synthèse initiale	Image de synthèse ( $f$ ) (avec bruit de chatoiement)
	
Image de synthèse restaurée ( $u$ )	Composante oscillante ( $v + 150.0$ )
	
Image reconstituée ( $u+v$ ) ( $u+v$ )	Image de synthèse classifiée (seuillage)
	

FIG. 5.2 – Image de synthèse simple ( $\lambda = 0.01$  et  $\mu = 80$ )

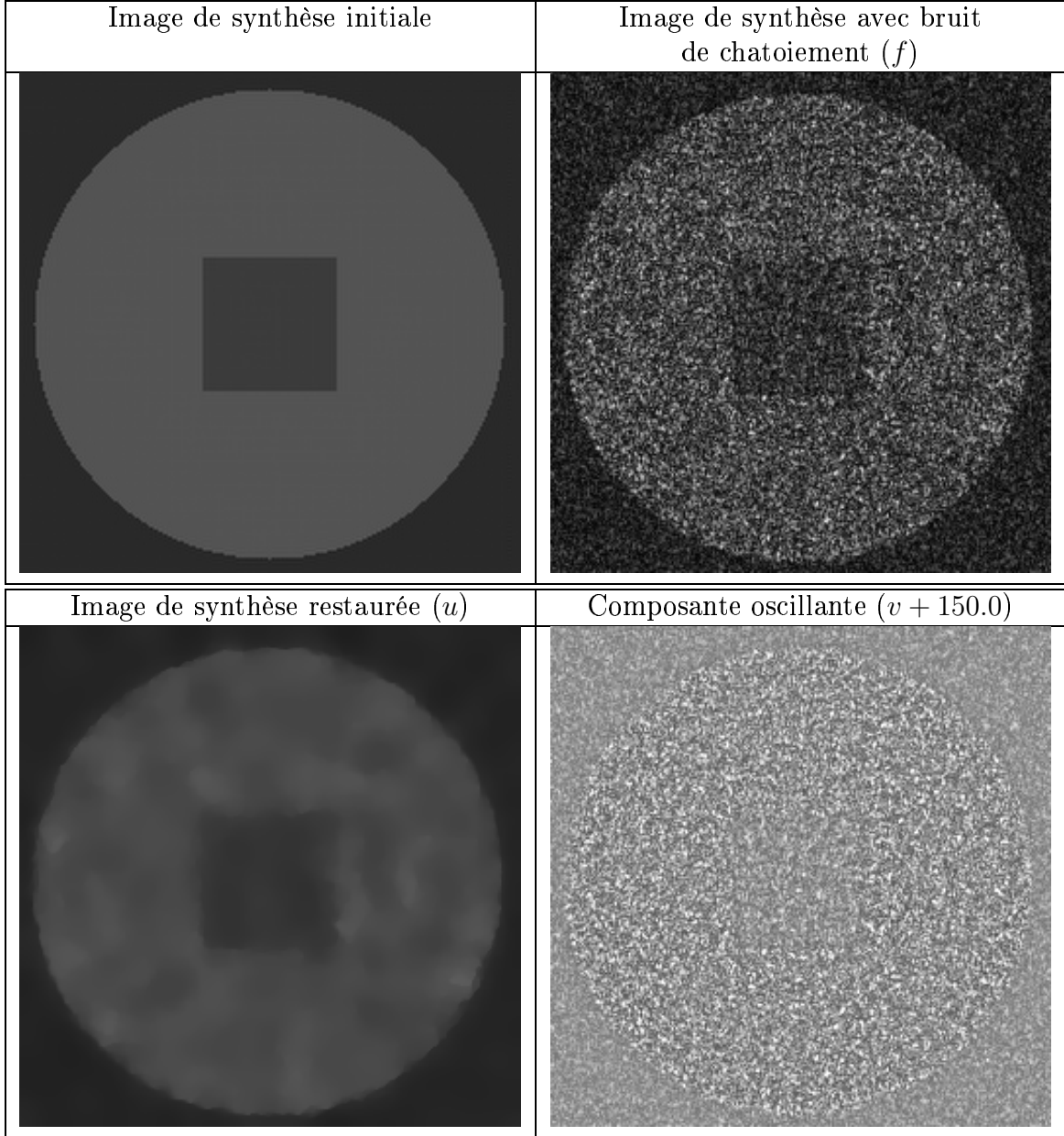


FIG. 5.3 – Image de synthèse plus compliquée ( $\lambda = 0.01$  et  $\mu = 80$ )

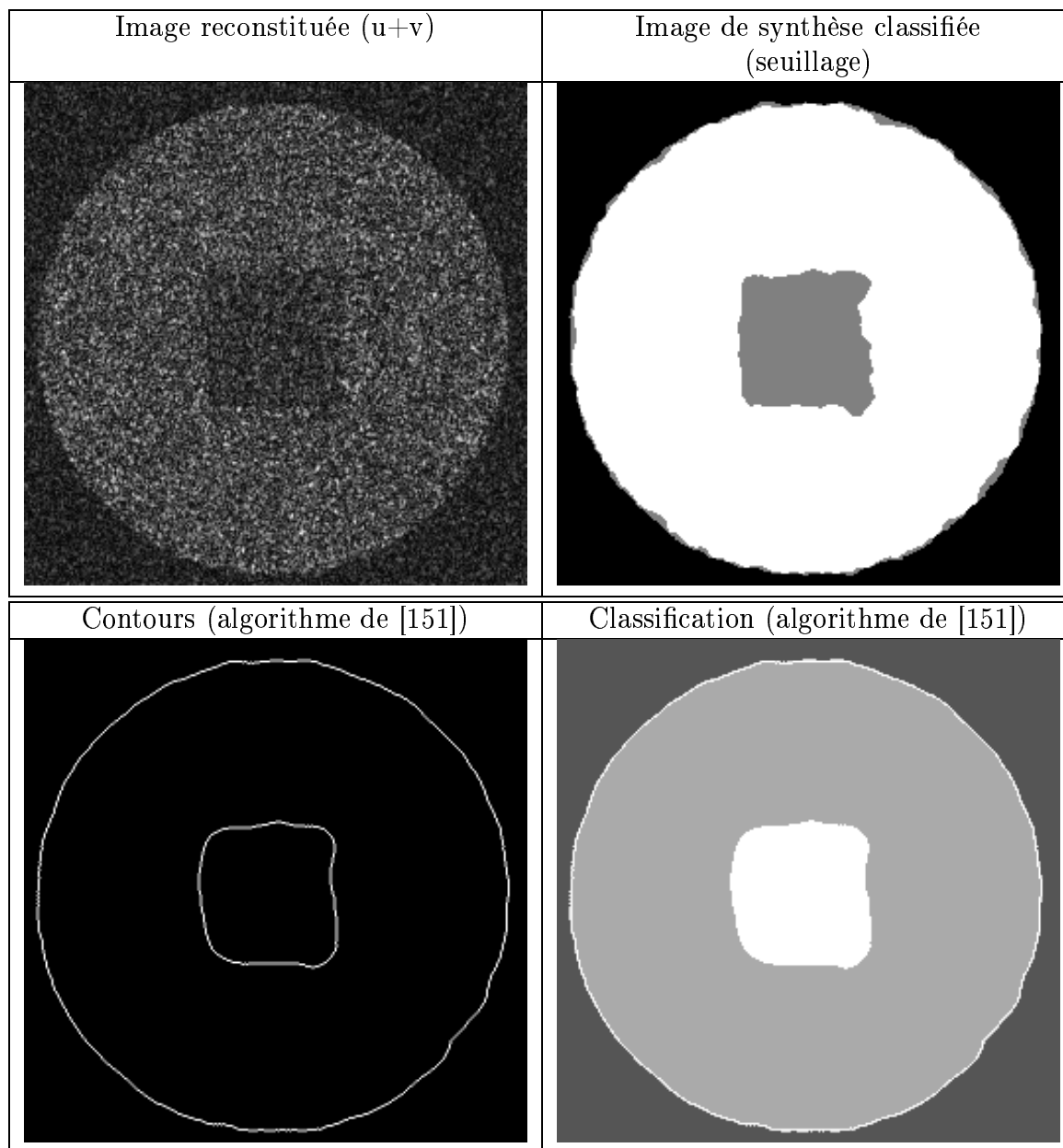


FIG. 5.4 – Image de synthèse plus compliquée ( $\lambda = 0.01$  et  $\mu = 80$ ) : classification

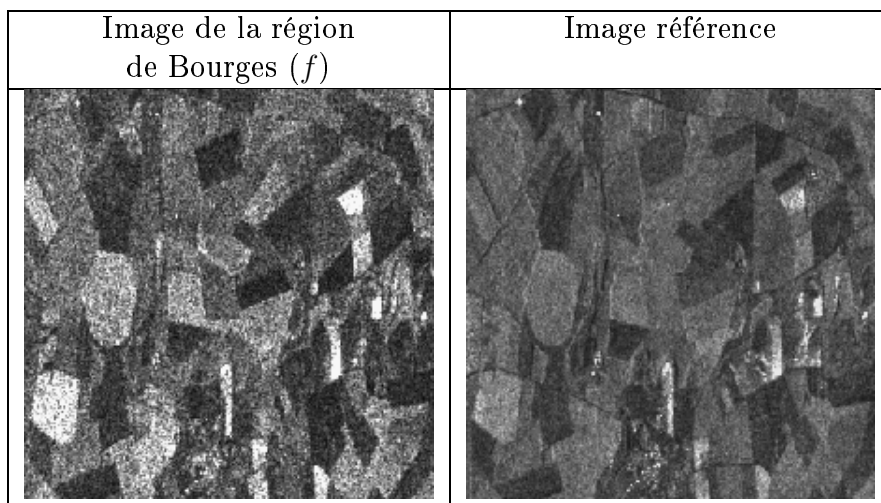


FIG. 5.5 – Image de la région de Bourges

#### 5.1.4 Conclusion

Notre algorithme de décomposition  $u + v$  consitue donc une approche originale pour restaurer les images RSO non texturées. Pour le moment, nous n'utilisons que la composante géométrique  $u$  pour faire de la restauration. Mais comme les propriétés statistiques du speckle (cf annexe C) contiennent également beaucoup d'information en imagerie RSO, on peut envisager de se servir également de la composante  $v$ .

**Remarque :** Pour tenir compte explicitement de la nature mutliplicative du bruit de speckle, nous avons étudié une autre approche dans [88]. Etant donné une image bruitée  $f$ , nous avons utilisé notre algorithme de décomposition  $u + v$  sur le logarithme de  $f$  (le bruit multiplicatif devient additif après application de la fonction logarithme). On montre un exemple de restauration sur une image laser fournie par la DGA (cf Figure 5.7) (le bruit sur une image laser est de même nature que celui des images RSO). Il semble que le fait de considérer le logarithme de  $f$  permet d'obtenir une version restaurée de  $f$  avec plus de contraste que sans le logarithme (mais au détriment de l'erreur quadratique moyenne).

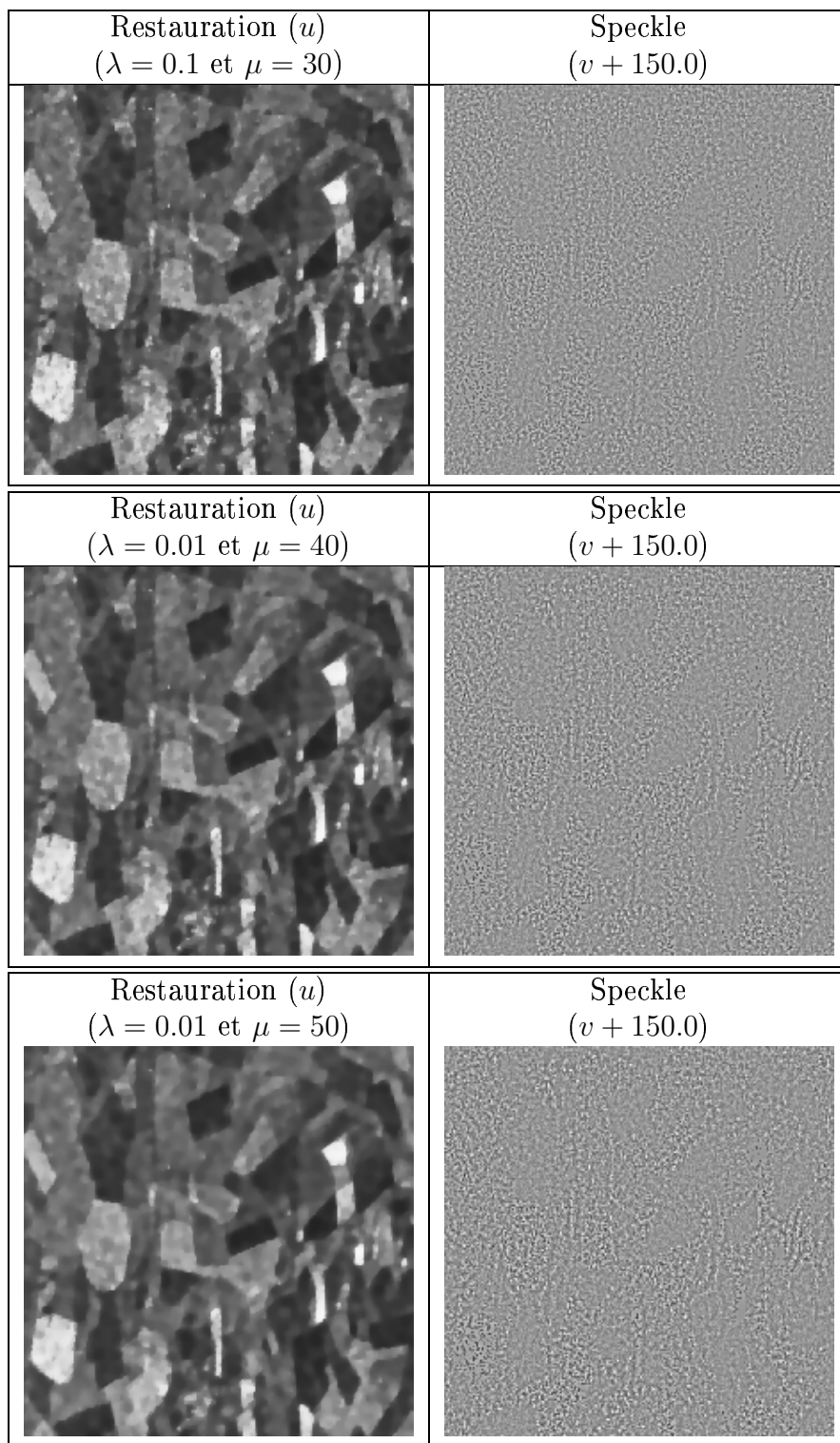


FIG. 5.6 – Image de la région de Bourges : restaurations

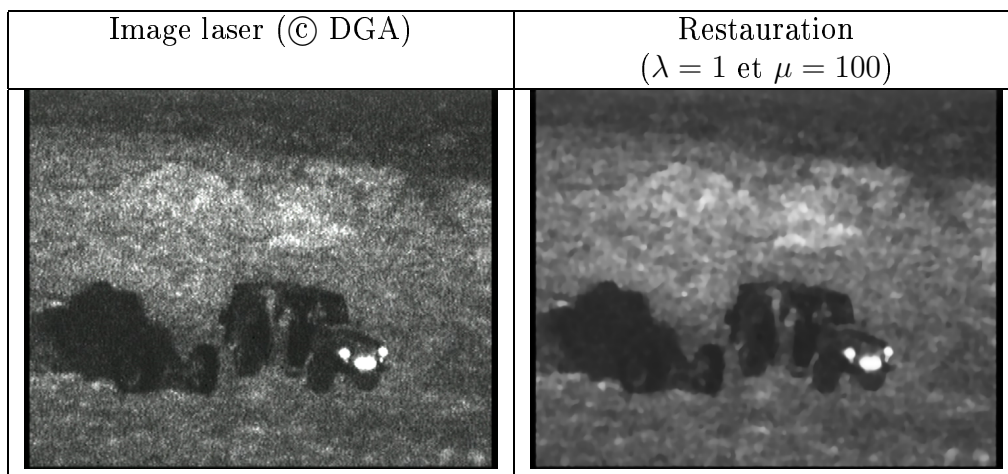


FIG. 5.7 – Restauration d'une image laser

## 5.2 . Compression

Dans cette section, nous proposons un algorithme de compression original basé sur notre algorithme de décomposition  $u + v$ . Ce nouvel algorithme de compression s'avère plus performant que les méthodes classiques.

### 5.2.1 Introduction

La compression d'image est un domaine de recherche très actif. L'objectif est de trouver une base dans laquelle l'image à compresser possède une représentation creuse, de sorte que l'on ait besoin de conserver peu de coefficients pour retrouver l'image.

Les ondelettes se sont révélées être un outil puissant dans ce domaine [125, 137]. Elles fournissent en effet une représentation relativement creuse pour les images (notamment pour les images texturées). Mais (cf [125] par exemple), les bords présents dans une image sont à l'origine de nombreux coefficients d'ondelettes significatifs. C'est pourquoi il y a eu de nombreux travaux ces dernières années pour trouver des représentations prenant en compte la géométrie de l'image. Plusieurs algorithmes ont été proposés [46, 75, 111, 131, 61, 60, 11] pour améliorer les résultats de compression en tenant compte de la structure des images. De telles méthodes se révèlent efficaces pour la compression des images géométriques. Dans l'Annexe B, nous présentons la méthode "Edge Adapted" développée dans [131, 61, 60, 11].

Nous proposons ici un cadre qui étend ces méthodes aux images contenant à la fois des structures et des textures. La compression des structures et celle des textures ne sont pas effectuées avec les mêmes algorithmes. C'est pourquoi nous voulons d'abord décomposer l'image à compresser en une composante géométrique et une composante texturée, et ensuite effectuer la compression de chacune des composantes séparément (avant de sommer à nouveau les deux composantes compressées). Une telle approche a été récemment utilisée avec succès pour la désocclusion d'images [36].

### Présentation de notre algorithme de compression

L'algorithme présenté dans l'Annexe B (EA) est un algorithme de compression efficace pour les images géométriques. Un tel algorithme est donc particulièrement bien adapté pour effectuer la compression de la composante géométrique d'une image.

L'idée de notre algorithme (UVEA) est la suivante. On commence par décomposer l'image originale  $f$  en deux composantes  $u$  et  $v$  avec l'algorithme  $u + v$ ,  $u$  étant la composante géométrique, et  $v$  la composante oscillante. On utilise ensuite l'algorithme de compression présenté dans l'annexe B (EA) sur  $u$ , et un algorithme de compression classique pour  $v$ . Pour  $v$ , on a décidé d'utiliser l'ondelette biorthogonale 7-9 (BW) [125, 137]. Pour reconstruire l'image, on fait la somme des deux composantes compressées.

### Décomposition

Nous présentons ici les images pour lesquelles nous allons montrer les résultats de compression dans la sous-section suivante (Figures 5.8 et 5.9). Les décompositions obtenues sont présentées sur les Figures 5.10 et 5.11. De plus, pour ne pas perdre d'information, nous avons décidé d'ajouter le résidu  $f - u - v$  à la composante géométrique (afin d'avoir une décomposition exacte).



FIG. 5.8 – Barbara



FIG. 5.9 – Phare



Composante  $BV\ u$



Composante oscillante  $v$



FIG. 5.10 – Décomposition de l'image Barbara ( $\lambda = 0.1$  et  $\mu = 60$ ).

Composante  $BV\ u$



Composante oscillante  $v$

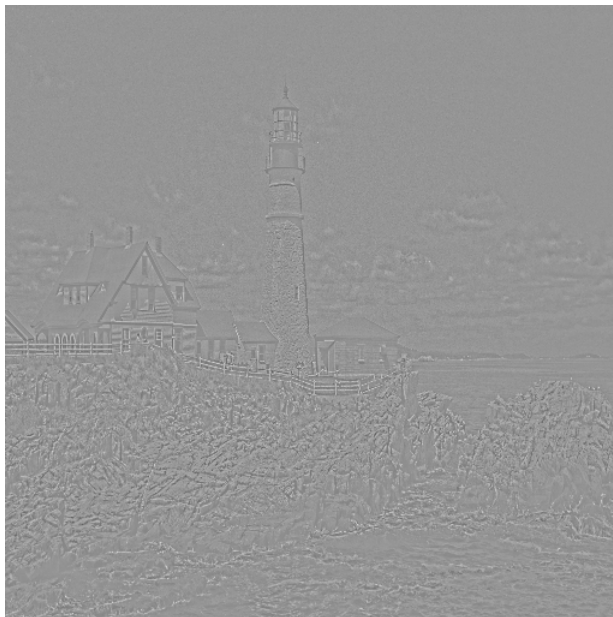


FIG. 5.11 – Décomposition de l'image du phare ( $\lambda = 0.1$  et  $\mu = 12$ ).



FIG. 5.12 – Image compressée avec notre algorithme (UVEA) (10% des coefficients pour  $u$  et  $v$ )

TAB. 5.1 – Erreurs  $L^2$  (image Barbara)

Algorithme	UVEA (10% , 10%)	UVEA (7% , 13%)	EA	BW
Erreur $L^2$	16.57	14.97	19.94	15.75
PSNR	23.48	24.79	22.13	24.23

## 5.2.2 Résultats numériques et commentaires

Les figures 5.12 et 5.13 sont les résultats que nous obtenons avec notre algorithme (UVEA) pour l'image Barbara (Figure 5.8). Dans le premier cas, nous avons gardé 10% des coefficients pour l'image de la partie géométrique et pour celle de la partie texture. Dans le second cas (Figure 5.13), on a gardé 7% des coefficients pour la partie géométrique et 13% pour la partie texturée. On voit qu'un tel choix améliore les résultats (cf Tableau 5.1).

La figure 5.14 est le résultat obtenu avec l'algorithme EA. On a conservé 20% des coefficients. Comme il a été développé pour des images géométriques, il n'est pas très performant sur des images contenant des textures. La figure 5.15 est le résultat obtenu avec l'algorithme standard BW (ondelette bi-orthogonale) : on a également conservé 20% des coefficients afin de pouvoir comparer les résultats.

Le Tableau 5.1 montre l'erreur  $L^2$ . La meilleure erreur  $L^2$  est obtenue par notre algorithme. De plus, l'information géométrique de l'image est bien mieux préservée avec notre algorithme qu'avec BW (pour les deux Figures 5.12 et 5.13) : cela se voit particulièrement bien au niveau du pied de la table par exemple (voir aussi la Figure 5.16 qui est un zoom de l'épaule de Barbara). Et des textures qui disparaissent avec l'algorithme BW sont préservées par notre algorithme (cf Figure 5.17 qui est un zoom du genoux de Barbara). Notre



FIG. 5.13 – Image compressée avec notre algorithme (UVEA) (7% des coefficients pour  $u$  et 13% pour  $v$ )



FIG. 5.14 – Image compressée avec EA (20% des coefficients)



FIG. 5.15 – Image compressée avec BW (20% des coefficients)

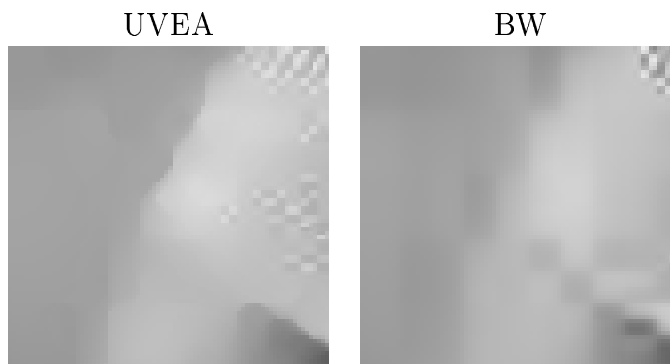


FIG. 5.16 – Zoom sur l'épaule de Barbara

algorithme donne donc de meilleurs résultats que l'algorithme BW.

Nous avons testé notre algorithme sur plusieurs images, et cela a confirmé ces résultats. Par exemple, la Figure 5.18 montre le résultat obtenu avec notre algorithme pour l'image du phare (Figure 5.9). Nous avons gardé 10% des coefficients à la fois pour la partie géométrique et la partie texturée. La Figure 5.19 montre le résultat obtenu avec l'algorithme BW (en conservant 20% des coefficients). On voit que les résultats pour l'image du phare confirment ceux obtenus pour l'image Barbara (cf Tableau 5.2).

Nous avons étudié numériquement la meilleure stratégie à adopter pour compresser une image donnée. Suivant l'image considérée, il peut être utile d'utiliser plus de coefficients pour coder l'une des deux composantes (géométrique ou texture). Les Figures 5.20 et 5.21 illustrent ce point. La Figure 5.20 (resp. Figure 5.21) concerne la Figure 5.8 (resp. Figure 5.9). Elle montre comment évolue le logarithme de l'erreur  $L^2$  en fonction du pourcentage  $p$  de coefficients conservés pour la partie géométrique (les valeurs de  $p$  vont ici de 1 à 19). Le

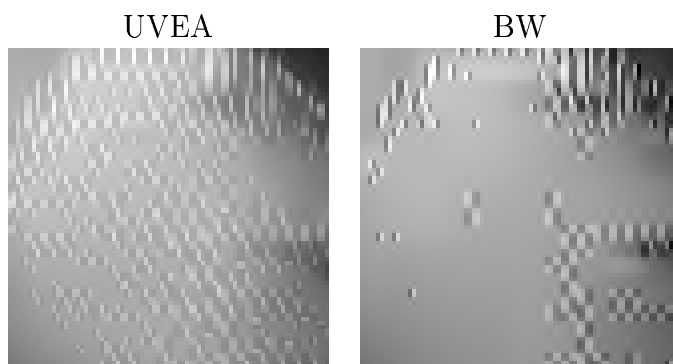


FIG. 5.17 – Zoom sur le genou de Barbara



FIG. 5.18 – Image compressée avec notre algorithme (UVEA) (10% des coefficients pour  $u$  et  $v$ )

TAB. 5.2 – Erreurs  $L^2$  (image du phare)

Algorithme	UVEA	BW
Erreur $L^2$	9.14	9.96
PSNR	28.88	28.19



FIG. 5.19 – Image compressée avec BW (20% des coefficients)

pourcentage de coefficients conservés pour la partie texture est donc ici de  $20\% - p$ , i.e. on a gardé 20% des coefficients pour toute l'image. On voit clairement que le meilleur choix pour l'image Barbara image est  $p = 6\%$ , et pour l'image du phare  $p = 10\%$ .

### 5.2.3 Perspectives

Au Chapitre 3, nous n'avons pas développé notre algorithme de décomposition  $u + v$  dans le but de faire de la compression d'image. Il est certainement possible d'améliorer la qualité des résultats de compression en tenant compte de l'objectif (qui est de compresser l'image) dans la fonctionnelle (cette assertion est renforcée par l'étude numérique de l'erreur de compression en fonction du pourcentage de coefficients attribués à chaque composante). De plus, nous nous sommes contentés ici de comparer les résultats de compression en terme de nombre de coefficients. Ce qu'il faudrait également regarder pour aller plus loin, c'est le nombre de bits nécessaires pour coder l'image compressée (c'est effectivement ce qui compte au final). En effet, il vaut peut-être mieux garder plus de coefficients avec une statistique telle qu'il soit facile de les coder efficacement, plutôt qu'un peu moins de coefficients plus difficiles à coder (il faut trouver le bon compromis).

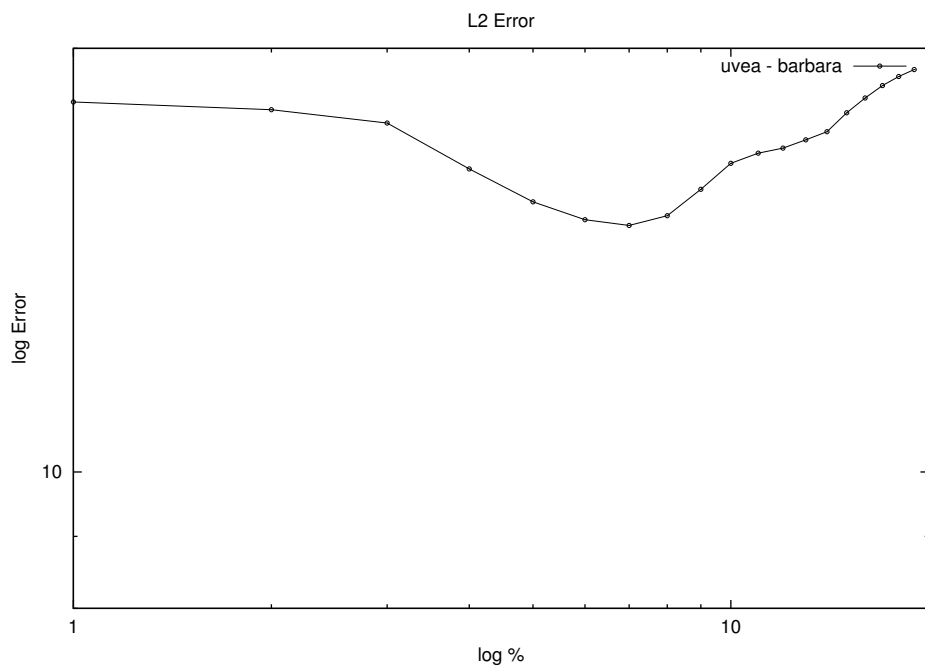


FIG. 5.20 – Stratégie pour l'image Barbara (20% des coefficients)

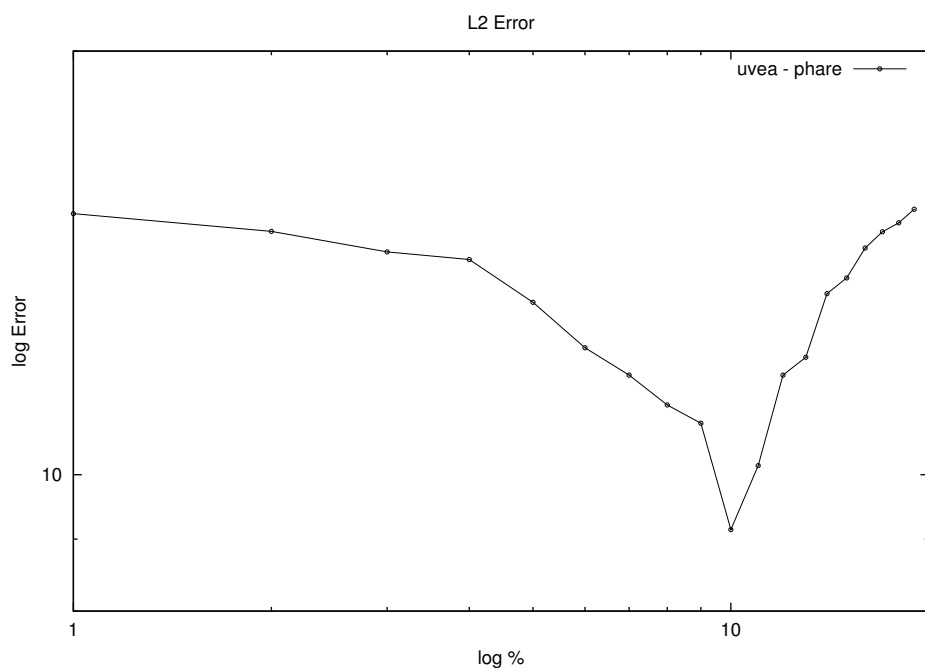


FIG. 5.21 – Stratégie pour l'image phare (20% des coefficients)





# Chapitre 6

## Modèle $u + v + w$

Dans ce chapitre, nous présentons un algorithme de décomposition  $u + v + w$ . Nous effectuons tout notre travail dans le cas discret (comme au Chapitre 3).

Nous commençons par étudier différents modèles pour effectuer la décomposition d'une image  $f$  en deux composantes, la première  $u$  contenant l'information géométrique, et la seconde  $v$  l'information oscillante. Puis, dans la Section 6.2, nous proposons un nouvel algorithme  $u + v$  : nous remplaçons la norme  $G$  utilisée dans l'algorithme présenté au Chapitre 3 par une norme  $E$  également bien adaptée pour capturer les phénomènes oscillants. Ce nouvel algorithme se révèle notamment particulièrement efficace en débruitage d'image (dans le cas où la composante  $v$  est un bruit).

Toutes ces remarques nous permettent alors de proposer un modèle  $u + v + w$ . Etant donnée une image originale  $f$ , nous la décomposons en trois composantes : la première,  $u$ , contient l'information géométrique, la deuxième,  $v$ , contient l'information texture, et la troisième,  $w$ , contient le bruit éventuel. Nous utilisons l'espace  $BV$  pour la composante  $u$ , l'espace  $G$  pour  $v$ , et l'espace  $E$  pour  $w$ . Cela achève momentanément notre étude d'algorithmes de décomposition.

Nous avons présenté ce travail dans [28].

### 6.1 . Minimisation de normes duales

Nous commençons d'abord par regarder différents algorithmes possibles de décomposition. Comme nous l'avons expliqué à la fin du Chapitre 2, nous savons calculer les différentes normes qui nous intéressent, mais il faut aussi savoir les minimiser de manière efficace. Nous nous plaçons ici dans le cadre discret :  $X = \mathbb{R}^{N^2}$  et  $Y = X \times X$ .

#### 6.1.1 Un peu d'analyse convexe

**Proposition 6.1.1.** *Soit  $F$  une fonction convexe propre sci. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\tilde{u}$  est solution de

$$\min_u \left( F(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u\|_X^2 \right) \quad (6.1.1)$$

2.  $\tilde{w} = f - \tilde{u}$  est solution de

$$\min_w \left( F^*(w/\lambda) + \frac{1}{2\lambda} \|f - w\|_X^2 \right) \quad (6.1.2)$$

Remarque : De plus, si  $F$  est convexe et 1-homogène (c'est le cas lorsque  $F$  est une semi-norme), alors  $F^*$  est la fonction indicatrice d'un ensemble fermé  $K$ .

### Exemples :

1. Si  $F(u) = J(u)$  (définie par (2.1.1)), alors

$$F^*(w) = \chi_{\{v / \|v\|_G \leq 1\}}(w) \quad (6.1.3)$$

2. Si  $F(u) = \|u\|_G$  (définie par (2.2.2)), alors

$$F^*(w) = \chi_{\{v / J(v) \leq 1\}}(w) \quad (6.1.4)$$

3. Si  $F(u) = \|u\|_{-1,p}$  (définie par (2.3.3)), alors

$$F^*(w) = \chi_{\{v / \|\nabla v\|_q \leq 1\}}(w) \quad (6.1.5)$$

4. Si  $F(u) = \|u\|_{\dot{B}_{1,1}^1}$  (cf Définition 2.4.2), alors

$$F^*(w) = \chi_{\{v / \|v\|_{\dot{B}_{-1,\infty}^{-1}} \leq 1\}}(w) \quad (6.1.6)$$

**Preuve de la Proposition 6.1.1** Il s'agit d'un résultat standard de dualité pour les problèmes variationnels [78].

$\tilde{u}$  est solution de

$$\min_u \left( F(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u\|^2 \right) \quad (6.1.7)$$

si et seulement si  $0 \in (1/\lambda)(\tilde{u} - f) + \partial F(\tilde{u})$ , i.e si et seulement si  $(1/\lambda)(f - \tilde{u}) \in \partial F(\tilde{u})$ , ce qui est équivalent à  $\tilde{u} \in \partial F^*\left(\frac{f - \tilde{u}}{\lambda}\right)$ , i.e

$$0 \in f - \tilde{u} - f + \partial F^*\left(\frac{f - \tilde{u}}{\lambda}\right) \quad (6.1.8)$$

ce qui signifie précisément que  $\tilde{w} = f - \tilde{u}$  est solution de

$$\min_w \left( \lambda F^*(w/\lambda) + \frac{1}{2} \|f - w\|^2 \right) \quad (6.1.9)$$

■

### 6.1.2 Application aux modèles $u + v$

On considère une fonctionnelle de la forme :

$$\min_{u,v} \left( F(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|_X^2 + L(v) \right) \quad (6.1.10)$$

où  $F$  et  $L$  sont deux fonctions convexes. Un algorithme naturel pour minimiser une telle fonctionnelle consiste à minimiser successivement par rapport à chacune des deux variables, i.e. à résoudre successivement les deux problèmes suivants :

$$\min_u \left( F(u) + \frac{1}{2} \|f - u - v\|^2 \right) \quad (6.1.11)$$

$$\min_v \left( \frac{1}{2} \|f - u - v\|^2 + L(v) \right) \quad (6.1.12)$$

Supposons que  $F(u) = J(u)$  définie par (2.1.1), et la fonction  $L$  est de la forme :

$$L(v) = \mu \|v\|_{-1,p} \quad (6.1.13)$$

**Commentaires :** En utilisant la Proposition 6.1.1, on voit que  $\tilde{v}$  est solution du problème (6.1.12) si et seulement si  $\tilde{w} = f - u - \tilde{v}$  est solution du problème :

$$\min_w \left( L^*(w) + \frac{1}{2} \|f - u - w\|^2 \right) \quad (6.1.14)$$

- Si  $p = 2$  dans (6.1.13), alors en utilisant (6.1.5) on voit que la minimisation de (6.1.12) revient à faire une minimisation de Tikhonov avec une pénalisation  $H^1$  (et on sait qu'une telle régularisation n'est pas un bon choix en traitement d'image car elle ne préserve pas les bords).
- Si  $p = 1$  dans (6.1.13), alors en utilisant (6.1.5) on voit que la minimisation de (6.1.12) revient à faire une régularisation Lipshitz du gradient : ce n'est pas un bon choix non plus en traitement d'image (c'est une régularisation trop forte).
- D'une manière plus générale, si  $p \in [1, +\infty)$ , on voit qu'une telle minimisation lisse trop la partie géométrique de l'image (les bords sont érodés).

**Conclusion** Si on veut utiliser une fonctionnelle de la forme (6.1.10), les considérations précédentes sont en faveur de l'utilisation de la norme  $G$  pour récupérer les phénomènes oscillants, comme préconisé dans [133]. Même si une telle norme est plus compliquée à calculer (notamment par rapport à la norme  $\|\cdot\|_{-1,2}$ ), il semble intéressant de l'utiliser.

## 6.2 . Un nouvel algorithme $u + v$

Nous présentons ici un nouvel algorithme de décomposition  $u + v$ . Cet algorithme va se révéler particulièrement efficace pour le débruitage d'image.

### 6.2.1 Principe

Dans [133], l'auteur propose aussi de minimiser la fonctionnelle suivante :

$$\inf_{u+v=f} (J(u) + \beta \|v\|_E) \quad (6.2.1)$$

La présence de la norme de  $E = \dot{B}_{-1,\infty}^\infty$  ne permet pas de résoudre ce problème directement. A la place, on propose de minimiser la fonctionnelle suivante :

$$\inf_{(u,v) \in X^2} \left( J(u) + B^*(v/\delta) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|^2 \right) \quad (6.2.2)$$

où

$$B(w) = \|w\|_{\dot{B}_{1,1}^1} \quad (6.2.3)$$

et donc

$$B^*(w/\delta) = \chi_{\{\|w\|_E \leq \delta\}} \quad (6.2.4)$$

De plus, on note

$$E_\delta = \{w \mid \|w\|_E \leq \delta\} \quad (6.2.5)$$

Lorsque  $\lambda$  tend vers 0, on peut montrer que résoudre le problème (6.2.2) donne une solution pour (6.2.1) (en utilisant les mêmes arguments que dans la Section 3.3).

Pour minimiser (6.2.2), on considère les deux problèmes suivants :

- $v$  étant fixé, on cherche  $u$  solution de :

$$\inf_{u \in X} \left( J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|_X^2 \right) \quad (6.2.6)$$

- $u$  étant fixé, on cherche  $v$  solution de :

$$\inf_{v \in E_\delta} \|f - u - v\|_X^2 \quad (6.2.7)$$

Avec la Proposition 2.1.1, on sait que la solution de (6.2.6) est donnée par :

$\hat{u} = f - v - P_{G_\lambda}(f - v)$ . Et la solution de (6.2.7) est donnée par :  $\hat{v} = P_{E_\delta}(f - u - v)$ .

Pour calculer cette dernière projection, on considère le problème dual de (6.2.7) :

$$\inf_{w \in X} \left( \frac{1}{2} \|f - u - w\|^2 + \delta \|w\|_{\dot{B}_{1,1}^1} \right) \quad (6.2.8)$$

La solution  $\hat{w}$  de ce problème est obtenue par un algorithme de seuillage doux en ondelettes, avec un seuil de  $\delta$  (cf [51]). On écrit  $\tilde{w} = WST(f - u, \delta)$  (comme Wavelet Soft Thresholding). Et d'après la Proposition 6.1.1, on voit que  $\hat{v} = f - u - \hat{w}$ .

## Algorithme

1. Initialisation :

$$u_0 = v_0 = 0 \quad (6.2.9)$$

2. Itérations :

$$v_{n+1} = P_{E_\delta}(f - u_n) = f - u_n - WST(f - u_n, \delta) \quad (6.2.10)$$

$$u_{n+1} = f - v_{n+1} - P_{G_\lambda}(f - v_{n+1}) \quad (6.2.11)$$

3. Test d'arrêt : on arrête si

$$\max(|u_{n+1} - u_n|, |v_{n+1} - v_n|) \leq \epsilon \quad (6.2.12)$$

## 6.2.2 Analyse mathématique

Les preuves des résultats énoncés dans cette sous-section sont les mêmes qu'au Chapitre 3. Nous les donnons donc ici sans démonstration.

Le premier point que nous énonçons concerne la convergence de l'algorithme proposé.

**Proposition 6.2.1.** *La suite  $(u_n, v_n)$  construite en (6.2.9)–(6.2.12) converge vers  $(u_0, v_0) \in X \times X$  l'unique solution du problème (6.2.2).*

Pour voir le lien entre (6.2.1) et (6.2.2), on introduit le problème :

$$\inf_{u+v=f} (J(u) + B^*(v/\delta)) \quad (6.2.13)$$

Le résultat suivant fait le lien entre (6.2.1) et (6.2.13)

**Proposition 6.2.2.** *On fixe  $\beta > 0$  dans le problème (6.2.1). Soit  $(\hat{u}, \hat{v})$  une solution du problème (6.2.1). On fixe  $\delta = \|\hat{v}\|_E$  dans (6.2.13). Alors :*

- *$(\hat{u}, \hat{v})$  est aussi solution du problème (6.2.13).*
- *Réciproquement, toute solution  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  de (6.2.13) (avec  $\delta = \|\hat{v}\|_E$ ) est solution de (6.2.1).*

Pour faire complètement le lien entre (6.2.1) et (6.2.2), on doit étudier la limite de  $(u_\lambda, v_\lambda)$  dans le problème (6.2.2) lorsque  $\lambda \rightarrow 0^+$ .

**Proposition 6.2.3.** *On fixe  $\beta > 0$  dans (6.2.1). On fixe  $\delta = \|\hat{v}\|_E$  dans (6.2.2) et (6.2.13). On note  $(u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n})$  la solution du problème (6.2.2) (avec  $\lambda = \lambda_n$ ). Alors, lorsque  $\lambda_n$  tend vers 0, toute valeur d'adhérence de  $(u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n})$  est solution du problème (6.2.13).*

## 6.2.3 Résultats numériques et commentaires

**Choix des paramètres :** Le paramètre  $\lambda$  contrôle la norme  $L^2$  du résidu  $f - u - v$ . Plus il est petit, et plus la norme du résidu diminue. En pratique, on se contente de fixer  $\lambda$  à une petite valeur (dans nos expériences, on a utilisé  $\lambda \leq 1$  : la norme  $L^\infty$  du résidu est alors plus petite que 0.5 (et les valeurs de niveau de gris des images vont de 0 à 255)).

Le paramètre  $\delta$  représente la norme  $E$  de la composante  $v$ . En regardant de plus près l'algorithme, on voit que  $\delta$  est le seuil qui est utilisé lors du seuillage par ondelettes. Dans le cas du débruitage, on peut alors utiliser la valeur classique du seuil  $\sigma\sqrt{2\log(N^2)}$  où  $N^2$  est la taille de l'image [76, 120, 133]. On choisit donc  $\delta = \sigma\sqrt{2\log(N^2)}$ . En fait, pour obtenir de meilleurs résultats, on a introduit un paramètre de poids  $\eta$ , et on prend  $\delta = \eta\sigma\sqrt{2\log(N^2)}$ . En pratique,  $\eta$  est égal à 1, ou légèrement plus petit.

**Commentaires :** Sur les figures, on indique à chaque fois l'ondelette mère utilisée (on note *Haar* pour l'ondelette de Haar, *Daub8* pour l'ondelette de Daubechies à huit moments nuls, et *Daub10* pour l'ondelette de Daubechies à dix moments nuls).

Ce nouveau modèle paraît être un très bon algorithme de débruitage pour les images texturées. En effet, il permet de minimiser simultanément la variation totale et une norme de Besov (ce qui revient à effectuer un seuillage en ondelettes) de l'image restaurée. Il bénéficie donc des avantages des deux méthodes. On voit sur la Figure 6.2 que l'image restaurée a été plus régularisée avec ce nouveau modèle que par la méthode classique du seuillage en

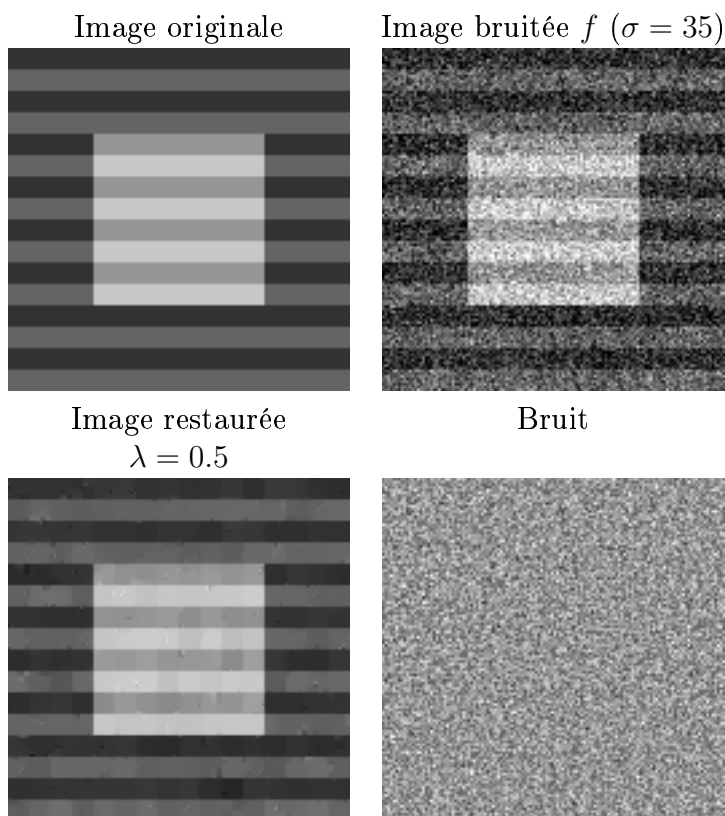
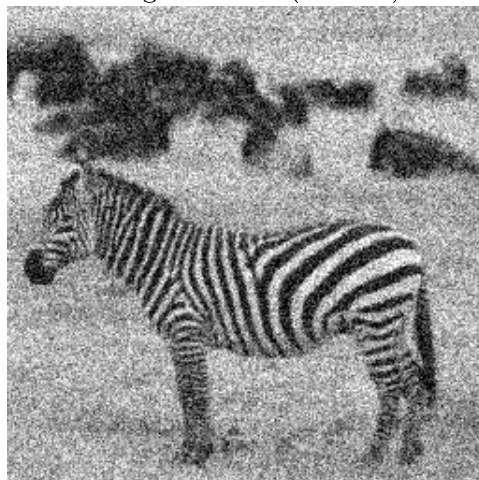


FIG. 6.1 – Débruitage de bandes (algorithme (6.2.9)–(6.2.12))

Image originale



Image bruitée ( $\sigma = 35$ )



Restauration (algorithme (6.2.9)–(6.2.12))  
( $\lambda = 0.5$ ,  $\eta = 0.7$ , Daub8)



Seuillage en ondelettes  
( $\eta = 0.7$ , Daub8)



FIG. 6.2 – Image du zèbre



Image originale



Image bruitée ( $\sigma = 20$ )



Restauration (algorithme (6.2.9)–(6.2.12))  
( $\lambda = 0.5$ ,  $\eta = 0.6$ , Daub8)



Restauration avec  
le modèle de Rudin-Osher-Fatemi



FIG. 6.3 – Débruitage de Barbara

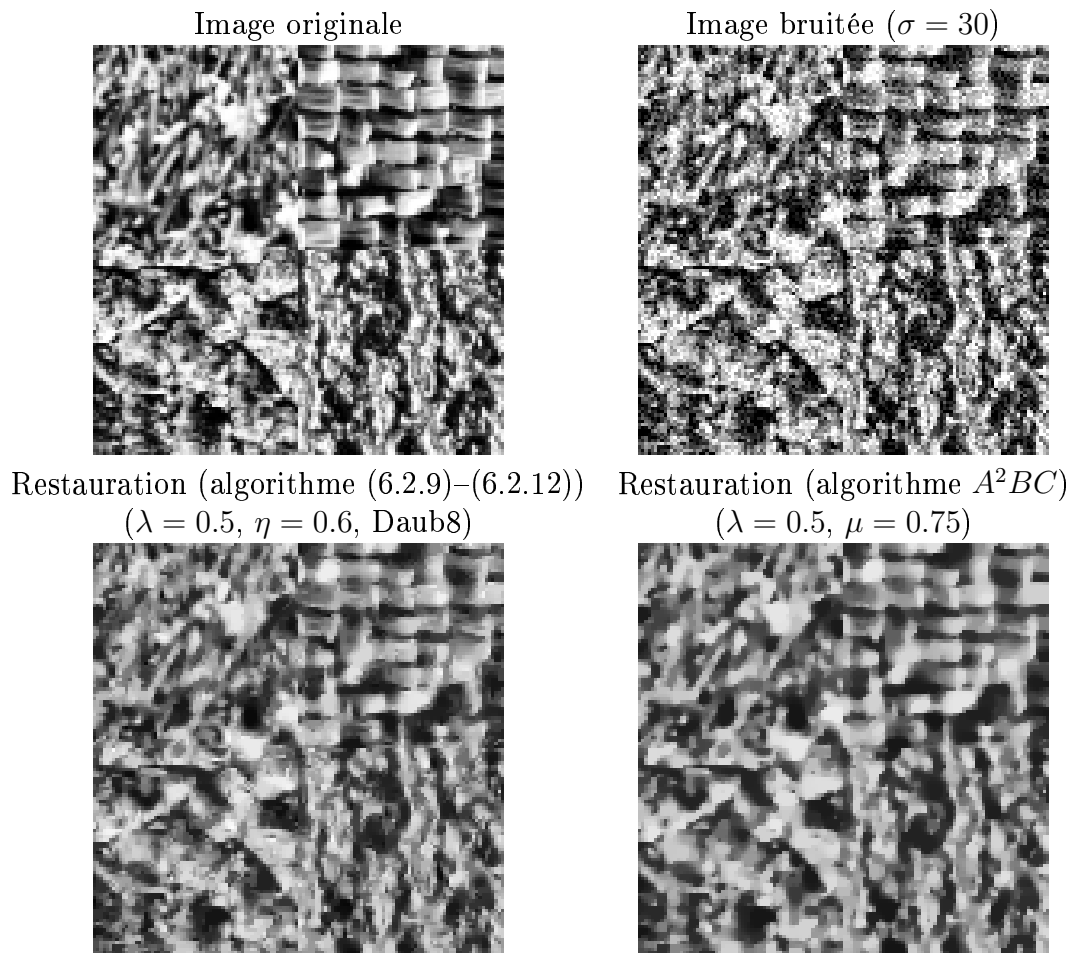


FIG. 6.4 – Débruitage d'une image texturée

ondelettes. La Figure 6.1 est à comparer avec la Figure 3.9 dans la Section 3.5, ainsi que la Figure 3.11 dans la Section 3.6. Dans ce cas, notre nouvel algorithme de débruitage est clairement plus efficace que le modèle ROF [149] où l'algorithme (3.2.9)–(3.2.12) (modèle de Meyer). Il apparaît également légèrement plus performant que le modèle OSV [143]. On voit sur la Figure 6.3 que les textures sont mieux préservées que par le modèle de Rudin-Osher-Fatemi [149, 49]. Et sur la Figure 6.4, on voit que les petites structures des textures sont mieux préservées qu'avec l'algorithme  $A^2BC$  (3.2.9)–(3.2.12). C'est pourquoi ce modèle est particulièrement bien adapté au débruitage des images texturées.

Dans [120, 119], l'auteur propose aussi de combiner les avantages de la minimisation de la variation totale et du seuillage par ondelettes. Il introduit un cadre général qui contient ces deux approches. De plus, ce cadre est adapté à l'utilisation d'autres dictionnaires que les bases d'ondelettes. Mais l'approche numérique est complètement différente. Il résout un problème de pénalisation qui est plus compliqué.

En conclusion de cette section, on voit que, pour construire un modèle qui décompose une image en trois composantes, une première contenant l'information géométrique, une deuxième les textures, et une dernière le bruit, il est naturel de considérer les trois normes suivantes : la variation totale, la norme  $G$ , et la norme  $E$ .

## 6.3 . Modèle $u + v + w$

Dans cette section, nous présentons notre algorithme de décomposition  $u + v + w$  (nous continuons à nous placer dans le cas discret).

### 6.3.1 Présentation

On propose de minimiser la fonctionnelle suivante :

$$\inf_{(u,v,w) \in X^3} F(u, v, w) \quad (6.3.1)$$

où

$$F(u, v, w) = J(u) + J^* \left( \frac{v}{\mu} \right) + B^* \left( \frac{w}{\delta} \right) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v - w\|^2 \quad (6.3.2)$$

**Proposition 6.3.1.** *(6.3.1) admet une solution  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ . De plus,  $\hat{u}$  et  $\hat{v} + \hat{w}$  sont uniques.*

**Preuve :** On sépare la preuve en deux parties :

Etape 1 : Existence

1. On commence par remarquer que l'ensemble  $X \times G_\mu \times E_\delta$  est convexe, puis que  $F$  est convexe sur  $X \times G_\mu \times E_\delta$ . On déduit donc que  $F$  est convexe sur  $X \times X \times X$ .
2. Il est immédiat de voir que  $F$  est continue sur  $X \times G_\mu \times E_\delta$ . On déduit alors que  $F$  est sci sur  $X \times X \times X$ .
3. Soit  $(u, v, w) \in X \times G_\mu \times E_\delta$ . On a  $\|v\|_G \leq \mu$ . De plus, comme  $X$  est de dimension finie, il existe  $g \in X$  tel que  $v = \text{div}(g)$  et  $\|g\|_{L^\infty} = \|v\|_G \leq \mu$ . On déduit de (2.1.15) que  $(N^2 \text{ est la taille de l'image})$  :

$$\|v\|_X \leq 4\mu N^2 \quad (6.3.3)$$

Comme  $w \in E_\delta$ , et comme  $X$  est de dimension finie, on obtient qu'il existe  $C > 0$  dépendant seulement de  $N$  et  $\delta$  tel que :

$$\|w\|_X \leq C \quad (6.3.4)$$

On rappelle que  $X \times X \times X$  est muni de la norme euclidienne.

$$\|(u, v, w)\|_{X \times X \times X} = \sqrt{\|u\|_X^2 + \|v\|_X^2 + \|w\|_X^2} \quad (6.3.5)$$

Donc, si  $\|(u, v, w)\|_{X \times X \times X} \rightarrow +\infty$ , alors on tire de (6.3.3) et (6.3.4) que  $\|u\|_X \rightarrow +\infty$ . On en déduit donc,  $f$  étant fixé et puisque (6.3.3) et (6.3.4) sont vérifiées, que  $\|f - u - v - w\|_X \rightarrow +\infty$ . Et comme  $F(u, v, w) \geq \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v - w\|_X^2$ , on obtient  $F(u, v, w) \rightarrow +\infty$ . On voit ainsi que  $F$  est coercive sur  $X \times G_\mu \times E_\delta$ . On conclut donc que  $F$  est coercive sur  $X \times X \times X$ .

On en déduit l'existence d'un minimiseur  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ .

Etape 2 : Unicité de  $\hat{u}$  et  $\hat{v} + \hat{w}$  :

Pour montrer ce résultat, on commence par remarquer que  $F$  est strictement convexe sur  $X \times G_\mu \times E_\delta$ , comme somme d'une fonction convexe et d'une fonction strictement convexe, sauf dans la direction  $(u, v, -u - v)$ . Il suffit donc de vérifier que si  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$  est un minimiseur de  $F$  alors pour  $t \neq 0$ ,  $(\hat{u} + t\hat{u}, \hat{v} + t\hat{v}, \hat{w} - t(\hat{u} + \hat{v}))$  n'est pas un minimiseur de  $F$ . Comme  $F$  est convexe, on peut se restreindre au cas  $|t| < 1$ .

Le résultat est évident si  $\hat{v} + t\hat{v} \in X \setminus G_\mu$  ou  $\hat{w} - t(\hat{u} + \hat{v}) \in X \setminus E_\delta$ . Montrons que si  $\hat{v} + t\hat{v} \in G_\mu$  et  $\hat{w} - t(\hat{u} + \hat{v}) \in E_\delta$ , alors le résultat est encore vrai. En effet, on a dans ce cas :

$$F(\hat{u} + t\hat{u}, \hat{v} + t\hat{v}, \hat{w} - t(\hat{u} + \hat{v})) = F(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) + tJ(\hat{u}) \quad (6.3.6)$$

Par l'absurde, on suppose qu'il existe  $\hat{t} \neq 0$  tel que  $\hat{w} - \hat{t}(\hat{u} + \hat{v}) \in E_\delta$ .

$$F(\hat{u} + \hat{t}\hat{u}, \hat{v} + \hat{t}\hat{v}, \hat{w} - \hat{t}(\hat{u} + \hat{v})) \leq F(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) \quad (6.3.7)$$

Comme  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$  minimise  $F$ , (6.3.7) est une égalité. De (6.3.6), on déduit que  $J(\hat{u}) = 0$  (car  $\hat{t} \neq 0$ ). Il existe donc  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $(i, j)$ ,  $\hat{u}_{i,j} = \gamma$ .

1. Si  $\gamma = 0$ , alors  $\hat{u} = 0$ . Donc  $(\hat{u} + \hat{t}\hat{u}, \hat{v} + \hat{t}\hat{v}, \hat{w} - \hat{t}(\hat{u} + \hat{v})) = (\hat{u}, \hat{v} + \hat{t}\hat{v}, \hat{w} - \hat{t}\hat{v})$ .
2. Si  $\gamma \neq 0$ , alors  $\hat{w} - \hat{t}(\hat{u} + \hat{v})$  ne peut pas être un élément de  $E_\delta$  car sa moyenne n'est pas nulle. Cela contredit notre hypothèse.

■

Pour résoudre (6.3.1), on considère les trois problèmes suivants :

- $v$  et  $w$  étant fixés, on cherche  $u$  solution de :

$$\inf_{u \in X} \left( J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v - w\|_X^2 \right) \quad (6.3.8)$$

- $u$  et  $w$  étant fixés, on cherche  $v$  solution de :

$$\inf_{v \in G_\mu} \|f - u - v - w\|_X^2 \quad (6.3.9)$$

- $u$  et  $v$  étant fixés, on cherche  $w$  solution de :

$$\inf_{w \in E_\delta} \|f - u - v - w\|_X^2 \quad (6.3.10)$$

D'après la Proposition 2.1.1, on sait que la solution de (6.3.8) est donnée par :  $\hat{u} = f - v - w - P_{G_\lambda}(f - v - w)$ . La solution de (6.3.9) est simplement donnée par :  $\hat{v} = P_{G_\mu}(f - u - w)$ . Et comme dans la Section 6.2, la solution de (6.3.10) est donnée par :  $\hat{w} = P_{E_\delta}(f - u - v) = f - u - v - WST(f - u - v, \delta)$ , où  $WST(f - u - v, \delta)$  désigne le seuillage en ondelettes doux de  $f - u - v$  de seuil  $\delta$ .

## 6.3.2 Algorithme

### Algorithme 1 :

1. Initialisation :

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0 \quad (6.3.11)$$

2. Itérations :

$$w_{n+1} = P_{E_\delta}(f - u_n - v_n) = f - u_n - v_n - WST(f - u_n - v_n, \delta) \quad (6.3.12)$$

$$v_{n+1} = P_{G_\mu}(f - u_n - w_{n+1}) \quad (6.3.13)$$

$$u_{n+1} = f - v_{n+1} - w_{n+1} - P_{G_\lambda}(f - v_{n+1} - w_{n+1}) \quad (6.3.14)$$

3. Test d'arrêt : on arrête d'itérer si

$$\max(|u_{n+1} - u_n|, |v_{n+1} + w_{n+1} - v_n - w_n|) \leq \epsilon \quad (6.3.15)$$

4. On obtient donc  $\hat{u} = \lim_n(u_n)$ . On continue alors les itérations en  $w$  et  $v$  :

$$w_{n+1} = P_{E_\delta}(f - \hat{u} - v_n) = f - \hat{u} - v_n - WST(f - \hat{u} - v_n, \delta) \quad (6.3.16)$$

$$v_{n+1} = P_{G_\mu}(f - \hat{u} - w_{n+1}) \quad (6.3.17)$$

5. Test d'arrêt : on arrête d'itérer si

$$\max(|v_{n+1} - v_n|, |w_{n+1} - w_n|) \leq \epsilon \quad (6.3.18)$$

En pratique, on utilise plutôt l'algorithme suivant (numériquement, il semble donner les mêmes résultats).

### Algorithme 2 :

1. Initialisation :

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0 \quad (6.3.19)$$

2. Itérations :

$$w_{n+1} = P_{E_\delta}(f - u_n - v_n) = f - u_n - v_n - WST(f - u_n - v_n, \delta) \quad (6.3.20)$$

$$v_{n+1} = P_{G_\mu}(f - u_n - w_{n+1}) \quad (6.3.21)$$

$$u_{n+1} = f - v_{n+1} - w_{n+1} - P_{G_\lambda}(f - v_{n+1} - w_{n+1}) \quad (6.3.22)$$

3. Test d'arrêt : on arrête si

$$\max(|u_{n+1} - u_n|, |v_{n+1} - v_n|, |w_{n+1} - w_n|) \leq \epsilon \quad (6.3.23)$$

**Proposition 6.3.2.**

- La suite  $(u_n, v_n, w_n)$  construite dans l'algorithme 1 converge vers  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$  minimiseur de (6.3.1).
- La suite  $(u_n, v_n, w_n)$  construite dans l'algorithme 2 est telle que  $u_n$  converge vers  $\hat{u} \in X$ , et si  $(\hat{v}, \hat{w})$  est un point d'adhérence de  $(v_n, w_n)$  alors  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$  est un minimiseur de (6.3.1).

**Preuve** On comence par remarquer que, comme on résout des problèmes de minimisation successifs, on a :

$$F(u_n, v_n, w_n) \geq F(u_n, v_n, w_{n+1}) \geq F(u_n, v_{n+1}, w_{n+1}) \geq F(u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}) \quad (6.3.24)$$

En particulier, la suite  $F(u_n, v_n, w_n)$  est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge donc dans  $\mathbb{R}$ . On note  $m$  sa limite. On veut montrer que

$$m = \inf_{(u,v,w) \in X \times X \times X} F(u, v, w) \quad (6.3.25)$$

On peut supposer sans restriction que,  $\forall n$ ,  $(u_n, v_n, w_n) \in X \times G_\mu \times E_\delta$ . Comme  $F$  est coercive et comme la suite  $F(u_n, v_n, w_n)$  converge, on en déduit que la suite  $(u_n, v_n, w_n)$  est bornée dans  $X \times G_\mu \times E_\delta$ . On peut donc extraire une sous-suite  $(u_{n_k}, v_{n_k}, w_{n_k})$  qui converge vers  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$  lorsque  $n_k \rightarrow +\infty$ , avec  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) \in X \times G_\mu \times E_\delta$ . De plus, on a, pour tout  $n_k \in \mathbb{N}$  et tout  $w$  dans  $X$  :

$$F(u_{n_k}, v_{n_k}, w_{n_k+1}) \leq F(u_{n_k}, v_{n_k}, w) \quad (6.3.26)$$

On a aussi, pour tout  $n_k \in \mathbb{N}$  et tout  $v$  dans  $X$  :

$$F(u_{n_k}, v_{n_k+1}, w_{n_k+1}) \leq F(u_{n_k}, v, w_{n_k+1}) \quad (6.3.27)$$

et pour tout  $n_k \in \mathbb{N}$  et tout  $u$  dans  $X$  :

$$F(u_{n_k}, v_{n_k}, w_{n_k}) \leq F(u, v_{n_k}, w_{n_k}) \quad (6.3.28)$$

On note  $\tilde{w}$  un point d'adhérence de  $(w_{n_k+1})$ . En considérant (6.3.24), on obtient (car  $F$  est continue sur  $X \times G_\mu \times E_\delta$ ) :

$$m = F(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) = F(\hat{u}, \hat{v}, \tilde{w}) \quad (6.3.29)$$

En passant à la limite dans (6.3.12), on obtient :  $\tilde{w} = P_{E_\delta}(f - \hat{u} - \hat{v})$ . Mais par (6.3.29), on sait que :  $\|f - \hat{u} - \hat{v} - \hat{w}\| = \|f - \hat{u} - \hat{v} - \tilde{w}\|$ . Par unicité de la projection, on conclut que  $\tilde{w} = \hat{w}$ . D'où  $w_{n_k+1} \rightarrow \hat{w}$ .

On note  $\tilde{v}$  un point d'adhérence de  $(v_{n_k+1})$ . De la même manière que ci-dessus, on peut montrer que  $\tilde{v} = \hat{v}$ . D'où  $v_{n_k+1} \rightarrow \hat{v}$ .

En passant à la limite dans (6.3.26) ( $F$  est continue sur  $X \times G_\mu \times E_\delta$ ), on a donc pour tout  $w$  :

$$F(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) \leq F(\hat{u}, \hat{v}, w) \quad (6.3.30)$$

En passant à la limite dans (6.3.27) ( $F$  est continue sur  $X \times G_\mu \times E_\delta$ ), on a donc pour tout  $v$  :

$$F(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) \leq F(\hat{u}, v, \hat{w}) \quad (6.3.31)$$

Et en passant à la limite dans (6.3.28), pour tout  $u$  :

$$F(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) \leq F(u, \hat{v}, \hat{w}) \quad (6.3.32)$$

On peut respectivement réécrire (6.3.30), (6.3.31) et (6.3.32) en :

$$F(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) = \inf_{w \in X} F(\hat{u}, \hat{v}, w) \quad (6.3.33)$$

$$F(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) = \inf_{v \in X} F(\hat{u}, v, \hat{w}) \quad (6.3.34)$$

$$F(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) = \inf_{u \in X} F(u, \hat{v}, \hat{w}) \quad (6.3.35)$$

Mais, par définition de  $F(u, v, w)$ , (6.3.33) est équivalente à (cf [78]) :

$$0 \in -f + \hat{u} + \hat{v} + \hat{w} + \lambda \partial B^* \left( \frac{\hat{w}}{\delta} \right) \quad (6.3.36)$$

et (6.3.34) à

$$0 \in -f + \hat{u} + \hat{v} + \hat{w} + \lambda \partial J^* \left( \frac{\hat{v}}{\mu} \right) \quad (6.3.37)$$

et (6.3.35) à

$$0 \in -f + \hat{u} + \hat{v} + \hat{w} + \lambda \partial J(\hat{u}) \quad (6.3.38)$$

Le sous-différentiel de  $F$  en  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$  est donné par :

$$\partial F(\hat{u}, \hat{v}) = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} -f + \hat{u} + \hat{v} + \hat{w} + \lambda \partial J(\hat{u}) \\ -f + \hat{u} + \hat{v} + \hat{w} + \lambda \partial J^* \left( \frac{\hat{v}}{\mu} \right) \\ -f + \hat{u} + \hat{v} + \hat{w} + \lambda \partial B^* \left( \frac{\hat{w}}{\delta} \right) \end{pmatrix} \quad (6.3.39)$$

Et donc, d'après (6.3.38), (6.3.37) et (6.3.36), on a :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \partial F(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) \quad (6.3.40)$$

ce qui est équivalent à  $F(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) = \inf_{(u,v,w) \in X^3} F(u, v, w) = m$ . On en conclut que toute la suite  $F(u_n, v_n, w_n)$  converge vers  $m$  le minimum de  $F$  sur  $X \times G_\mu \times E_\delta$ . D'après la

Proposition 6.3.1, on en déduit que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\hat{u}$  et que  $(v_n + w_n)$  converge vers  $\hat{v} + \hat{w}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

On regarde maintenant la deuxième partie de l'algorithme. On a :

$$w_{n+1} = P_{E_\delta}(f - \hat{u} - v_n) \quad (6.3.41)$$

$$v_{n+1} = P_{G_\mu}(f - \hat{u} - w_{n+1}) \quad (6.3.42)$$

Cette transformation est 1-Lipschitz, i.e. :  $w_{n+1} = \psi_1(w_n)$  et  $v_{n+1} = \psi_2(v_n)$  avec  $\psi_1$  et  $\psi_2$  des fonctions 1-Lipschitz :  $\psi_1(w) = P_{E_\delta}(f - \hat{u} - P_{G_\mu}(f - \hat{u} - w))$  et  $\psi_2(v) = P_{G_\mu}(f - \hat{u} - P_{E_\delta}(f - \hat{u} - v))$ . En utilisant les mêmes arguments que dans la première partie de la preuve, on peut extraire une sous-suite  $(v_{n_k}, w_{n_k})$  de  $(v_n, w_n)$  convergeant vers  $(\hat{v}, \hat{w}) \in G_\mu \times E_\delta$ . De plus,  $\psi_1(\hat{w}) = \hat{w}$  et  $\psi_2(\hat{v}) = \hat{v}$ . On en déduit que toute la suite  $(v_n, w_n)$  converge vers  $(\hat{v}, \hat{w})$ . ■

### 6.3.3 Problème limite

On peut montrer des résultats analogues à ceux des Sections 3.3 et 6.2. Dans cette sous-section, on donne donc les résultats sans démonstration car les preuves sont identiques.

On introduit les deux problèmes suivants :

$$\inf_{f=u+v+w} J(u) + J^*\left(\frac{v}{\mu}\right) + B^*\left(\frac{w}{\delta}\right) \quad (6.3.43)$$

$$\inf_{f=u+v+w} J(u) + \alpha\|v\|_G + \beta\|w\|_E \quad (6.3.44)$$

On commence par faire le lien entre (6.3.44) et (6.3.43).

**Proposition 6.3.3.** *On fixe  $\alpha$  et  $\beta$  dans le problème (6.3.44). Soit  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$  une solution du problème (6.3.44). On prend  $\mu = \|v\|_G$  et  $\delta = \|w\|_E$  dans (6.3.43). Alors  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$  est aussi solution du problème (6.3.43).*

On fait maintenant le lien entre (6.3.43) et (6.3.1), en étudiant la limite lorsque  $\lambda$  tend vers 0 dans le problème (6.3.1).

**Proposition 6.3.4.** *On note  $(u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n}, w_{\lambda_n})$  une solution du problème (6.3.1) (avec  $\lambda = \lambda_n$ ). Alors, lorsque  $\lambda_n$  tend vers 0, tout point d'adhérence de la suite  $(u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n}, w_{\lambda_n})$  est solution du problème (6.3.43).*

### 6.3.4 Résultats numériques

On montre quelques résultats numériques sur les Figures 6.5 à 6.9. Dans le cas de la Figure 6.5, la décomposition est quasi parfaite. Et même pour une image plus compliquée comme Barbara, le résultat de décomposition est très proche du résultat souhaité. Sur les figures, on indique à chaque fois l'ondelette mère utilisée (on note *Haar* pour l'ondelette de Haar, *Daub8* pour l'ondelette de Daubechies à huit moments nuls, et *Daub10* pour l'ondelette de Daubechies à dix moments nuls).



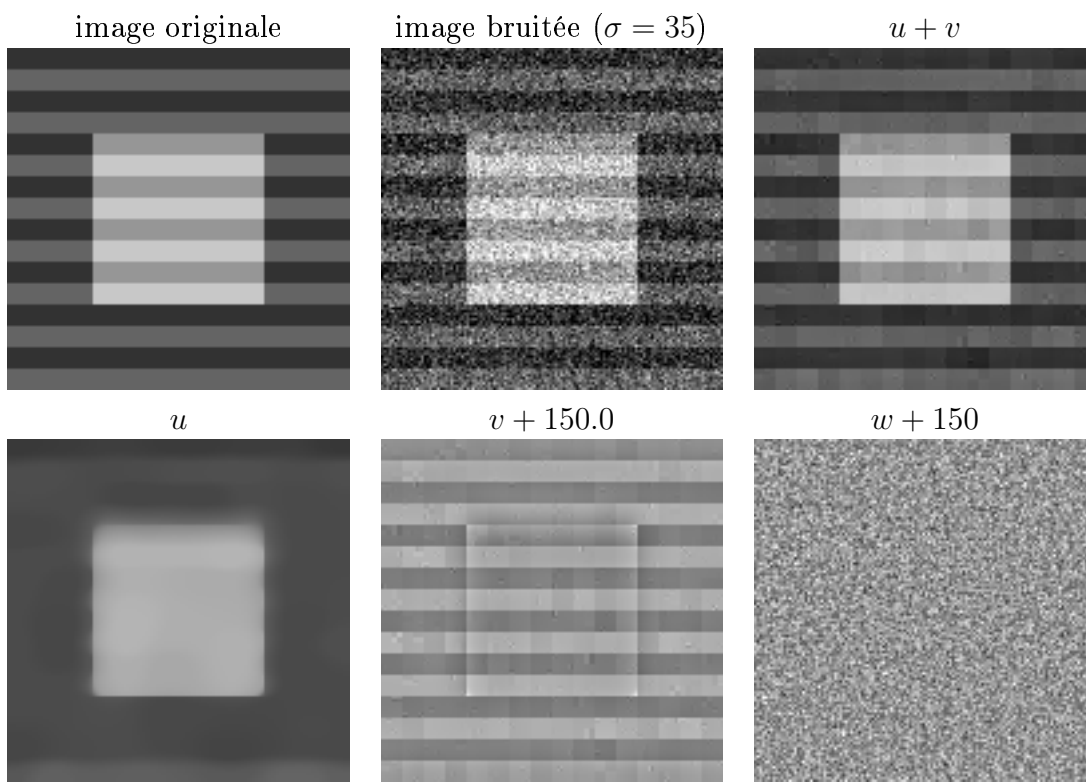


FIG. 6.5 – Un exemple simple ( $\lambda = 0.5$ ,  $\mu = 120$ ,  $\eta = 1.0$ , Haar)

**Choix des paramètres :** Le paramètre  $\lambda$  contrôle la norme  $L^2$  du résidu  $f - u - v$ . Plus il est petit, et plus la norme du résidu diminue. En pratique, on se contente de fixer  $\lambda$  à une petite valeur (dans nos expériences, on a utilisé  $\lambda \leq 1$  : la norme  $L^\infty$  du résidu est alors plus petite que 0.5 (et les valeurs de niveau de gris des images vont de 0 à 255)).

Le paramètre  $\mu$  représente la norme  $G$  de la composante  $v$ .

Le paramètre  $\delta$  représente la norme  $E$  de la composante  $w$ . En regardant de plus près l'algorithme, on voit que  $\delta$  est le seuil qui est utilisé lors du seuillage par ondelettes. Dans le cas du débruitage, on peut alors utiliser la valeur classique du seuil  $\sigma\sqrt{2\log(N^2)}$  où  $N^2$  est la taille de l'image [76, 120, 133]. On choisit donc  $\delta = \sigma\sqrt{2\log(N^2)}$ . En fait, pour obtenir de meilleurs résultats, on a introduit un paramètre de poids  $\eta$ , et on prend  $\delta = \eta\sigma\sqrt{2\log(N^2)}$ . En pratique,  $\eta$  est égal à 1, ou légèrement plus petit.

**Remarque :** Le modèle dans [157] peut s'écrire :

$$\min_{u,v} (\|\mathcal{C}u\|_1 + \|\mathcal{D}v\|_1 + \alpha\|f - u - v\|_2^2 + \beta J(u)) \quad (6.3.45)$$

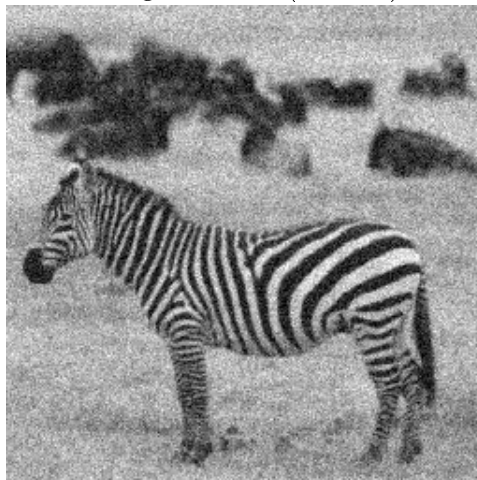
où  $\mathcal{C}$  est une transformation adaptée à la partie géométrique de l'image (la transformée curvelet par exemple), et  $\mathcal{D}$  une transformation adaptée à la partie texture de l'image (la transformée en cosinus discrète par exemple). Le bruit  $w = f - u - v$  est pénalisé par sa norme  $L^2$ . En fait, les auteurs de [157] obtiennent la composante bruitée comme un reste dans leur modèle. Mais ils n'ont pas vraiment introduit une norme spécifique au bruit, contrairement à ce que nous avons fait. De plus, si on utilise la transformée curvelet pour la partie géométrique de l'image dans (6.3.45), le temps de calcul est alors considérablement plus long qu'avec notre algorithme.

image originale



$u$

image bruitée ( $\sigma = 20$ )



$u + v$



$v + 150.0$



$w + 150$

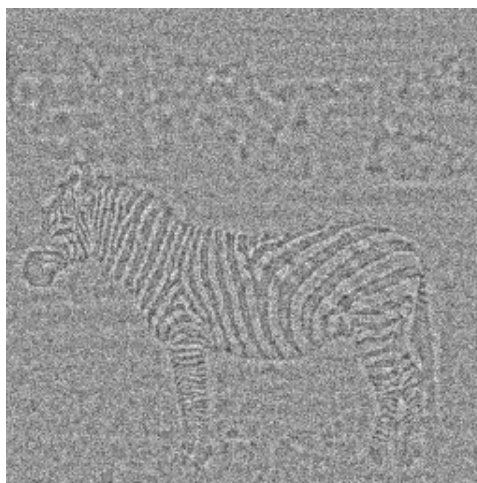


FIG. 6.6 – Image du zèbre ( $\lambda = 1.0$ ,  $\mu = 100$ ,  $\eta = 0.7$ , Daub8)

image originale



image bruitée ( $\sigma = 20$ )



FIG. 6.7 – Image Barbara I

$u$

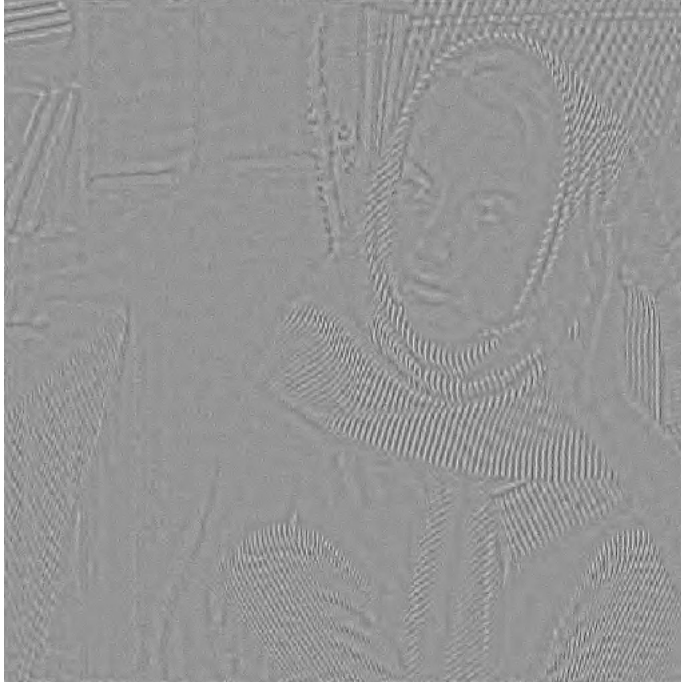


$u + v$



FIG. 6.8 – Image Barbara II ( $\lambda = 1.0$ ,  $\mu = 30$ ,  $\eta = 0.6$ , Daub8)

$v + 150.0$



$w + 150$

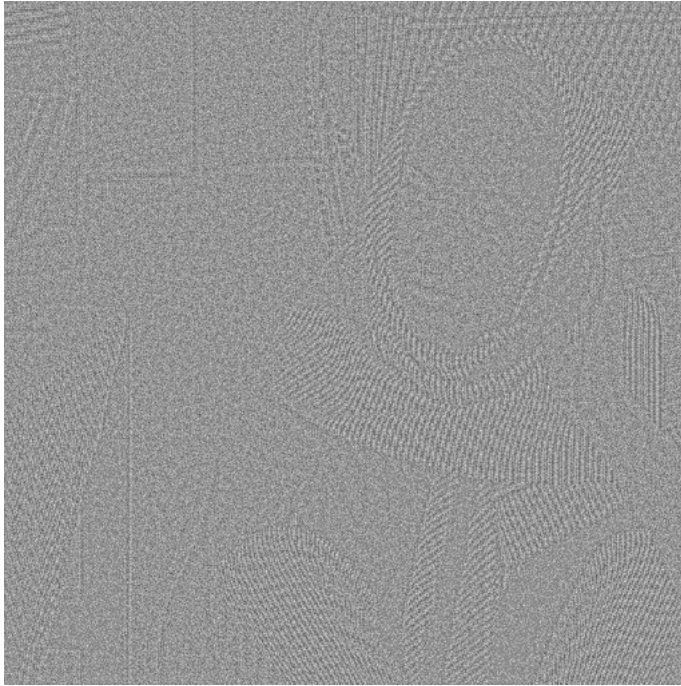


FIG. 6.9 – Image Barbara III ( $\lambda = 1.0$ ,  $\mu = 30$ ,  $\eta = 0.6$ , Daub8)

Remarquons enfin qu'un formalisme plus général été proposé dans [62] pour la décomposition des signaux.

## 6.4 . Conclusion et perspectives

Nous terminons ici notre étude de modèles de décomposition. Etant donnée une image originale  $f$ , nous avons proposé un algorithme qui la sépare en trois composantes : la première  $u$ , contient l'information géométrique, la seconde  $v$ , l'information texture, et la troisième  $w$  le bruit. Nous avons de plus effectué l'étude mathématique complète de notre modèle (en montrant notamment la convergence de notre algorithme).

Cependant, pour la composante bruit  $w$ , nous avons concentré nos efforts sur le cas du bruit gaussien. Le réglage du paramètre  $\delta$  est beaucoup plus délicat dans le cas d'un bruit non gaussien (la valeur théorique de Donoho [76, 133] pour le seuillage des coefficients en ondelettes n'est alors plus valable). D'une manière plus générale, le réglage des paramètres reste une question importante. Si le paramètre  $\lambda$  est facile à régler (il suffit de le choisir petit, nous avons pris par exemple  $\lambda = 0.1$  dans nos expériences), et si l'on peut avoir une estimation du paramètre  $\delta$  à partir de la valeur théorique pour le seuillage des coefficients en ondelettes, il n'en est pas de même pour le paramètre  $\mu$ . Certes, l'étude numérique du Chapitre 2 donne quelques idées, mais il y a encore beaucoup de travail à faire.

Le choix de décomposer une image en trois composantes peut paraître arbitraire. Pour certaines applications, il est peut-être pertinent de séparer les textures entre les textures très oscillantes, et les textures moyennement oscillantes, ou entre les textures lisses et les textures quasi géométriques (comme les rayures du zèbre par exemple).

Nous avons expliqué dans l'introduction que la recherche d'algorithmes de décomposition s'inscrivait plus généralement dans le cadre des problèmes de restauration d'images : étant donnée une image originale  $u$ , on suppose qu'elle a été dégradée par un bruit additif  $v$ , et éventuellement par un opérateur  $R$ . A partir de l'image observée  $f = Ru + v$  (qui est donc une version dégradée de l'image originale  $u$ ), on cherche à reconstruire  $u$ . Ici, nous n'avons considéré que le cas où  $R$  est l'opérateur identité ( $Ru = u$ ). Une extension de notre algorithme de décomposition  $u + v$  du Chapitre 3 a été proposée dans [35] pour faire de la déconvolution. Il faudrait maintenant l'étendre à l'algorithme de décomposition  $u + v + w$ .

Parmi les extensions possibles et intéressantes (mais non immédiates), citons deux possibilités : le cas des images couleurs, et le cas des images 3D. Dans les deux cas, il faut trouver des espaces pertinents pour caractériser les différentes composantes d'une image. En particulier, il faut trouver la bonne définition d'un espace  $G$  adapté aux textures (couleurs ou 3D).

Enfin, comme nous l'avons rapidement mentionné à la fin de la Section 5.1, il serait intéressant de développer une version multiplicative de notre algorithme de décomposition  $u + v$ . En effet, en imagerie cohérente (cf l'annexe C), le bruit dans une image est de nature multiplicative. Et cela concerne de très nombreuses applications (images RSO, images laser, images microscopiques, ...). De plus, une approche multiplicative permettrait de ne pas utiliser de multiplicateurs de Lagrange, et donc de paramètres toujours délicats à régler.

Etant donnée une image originale, nous sommes parvenus à isoler sa composante texturée. Dans la partie suivante, nous allons nous intéresser plus particulièrement à cette composante texturée. Nous allons développer un algorithme de classification pour les images texturées.



# Troisième partie

## Classification d'images





# Chapitre 7

## Un algorithme de classification d'images texturées

Dans la partie précédente, étant donnée une image originale, nous sommes parvenus à isoler sa composante texturée. Nous allons maintenant nous intéresser à cette composante texturée. Nous proposons ici un algorithme de classification supervisée pour les images texturées.

### 7.1 . Introduction

#### 7.1.1 Présentation du problème

Nous proposons dans ce chapitre un algorithme de classification supervisée d'images texturées basé sur une approche variationnelle. Nous avons présenté ce modèle dans [27, 23].

La classification consiste à attribuer une étiquette à chaque pixel d'une image, cette étiquette indiquant à quelle classe appartient le pixel. Elle peut être vue comme un problème de partition. C'est un des objectifs de base du traitement d'images. Elle intervient dans de nombreuses applications, comme par exemple la télédétection.

La classification est un problème très proche de celui de la segmentation, dans le sens où le but consiste à obtenir une partition de l'image en régions homogènes. Dans la classification, chaque sous-ensemble de la partition obtenue représente une classe.

De nombreux modèles de classification ont été mis au point, notamment à partir d'algorithmes de croissance de régions [85, 110, 164], ou par une approche stochastique [37, 39, 72, 73, 108, 126, 103], et plus récemment par une méthode variationnelle [163, 144, 150, 151, 152, 17].

L'approche utilisée ici est issue de [151, 171] et est basée sur les contours actifs [17, 47, 158, 142, 170, 52, 165]. La partition cherchée correspond au minimum d'une fonctionnelle (fonctionnelle dont nous effectuons l'étude théorique au Chapitre 8). Nous résolvons le système d'EDP associé. Ces EDP guident les interfaces (courbe de niveaux zéro) vers les frontières de la partition optimale par le biais de forces externes (régularité de l'interface) et internes (attache aux données et partition).

La classification est ici supervisée, car nous donnons en entrée les paramètres des différentes classes qui peuvent être présentes dans l'image.

## 7.1.2 Position du modèle dans la littérature

Il existe de nombreux modèles de classification d'image texturées dans la littérature [169]. On peut principalement les classer en deux groupes :

1. Les modèles statistiques traditionnels avec notamment les approches par champs de Markov (cf [37, 72, 73, 126, 39, 103, 108]).
2. Les modèles basés sur la théorie du filtrage, notamment les filtres de Gabor (cf [77, 144]) ou les ondelettes (cf [164, 58, 38, 82, 71, 153, 53, 104, 96]). Certains d'entre eux utilisent la théorie des textons pour discriminer les textures [102, 121].

Nous avons choisi d'utiliser l'approche par ondelettes qui fournit un excellent moyen de décomposer un signal en différentes sous-bandes dans lesquelles il est plus facile de le caractériser.

L'utilisation des ondelettes pour analyser les textures n'est pas nouvelle. Il existe essentiellement deux approches :

1. Les modèles qui supposent l'indépendance de la distribution des coefficients en ondelettes (cf [164, 124, 71, 153, 76]).
2. Les modèles qui supposent une dépendance spatiale (interaction entre les pixels) et à travers les échelles (interaction entre les coefficients en ondelettes à travers les échelles) (cf [58, 68, 112, 54, 116, 56, 55, 57, 53]). Ces derniers modèles, basés sur des arbres de Markov cachés, sont néanmoins assez lourds à mettre en oeuvre, et il ne nous semble pas que les améliorations soient importantes.

Nous avons choisi l'utilisation d'un modèle du type proposé par Unser [164]. Nous considérons qu'une texture est caractérisée par l'énergie de ses coefficients en ondelettes dans chaque sous-bande de la décomposition. Notre choix est confirmé par la qualité des résultats que nous obtenons.

Notre modèle est nouveau car il est à notre connaissance le seul qui utilise simultanément une approche par contours actifs et par ondelettes.

Dans la littérature, le modèle le plus proche est celui de Paragios et Deriche proposé dans [144]. Mais il diffère sur de nombreux points :

1. Dans [144], les auteurs utilisent un modèle présenté dans [171] et caractérisent les textures à l'aide de filtres de Gabor. Historiquement, les filtres de Gabor ont été introduits avant les bases d'ondelettes (cf [133]). Mais le coût de stockage est très important, et il existe des fonctions de  $L^2$  qui ne peuvent être décomposées en une série convergente d'ondelettes de Gabor. La construction des bases d'ondelettes par Ingrid Daubechies (cf [69]) a permis de palier à ces inconvénients. De plus, les filtres de Gabor ont un coût plus important, spécialement en ce qui concerne l'évaluation des composantes basses fréquences. Les filtres de Gabor ne sont pas orthogonaux, ce qui peut entraîner une corrélation significative entre les textures. Enfin, ces transformations ne sont en général pas réversibles ce qui limite leur application pour la synthèse de texture (cf [164]). C'est pour toutes ces raisons que l'utilisation des ondelettes nous paraît plus appropriée.
2. L'introduction des contours actifs dans notre modèle est plus naturelle : elle découle en effet directement de la fonctionnelle que nous cherchons à minimiser. De plus, dans [144], l'énergie ne comporte pas de termes de couplage. Ils sont rajoutés au niveau des équations d'Euler-Lagrange.
3. Le modèle de [144] est moins général que celui que nous proposons : il s'applique au cas d'une image comportant des textures posées sur un fond (lui même texturé). En

particulier, il n'est pas présenté dans [144] ou [145] d'exemple de segmentation ou de classification d'image avec des jonctions triples.

4. Il faut noter que contrairement au modèle proposé dans [151], nous ne disposons pas d'une fonction d'arrêt sur les contours : elle était basée sur le gradient de l'image, et comme nous nous intéressons ici à des images texturées, une telle approche n'est plus possible.

Dans [144], les auteurs utilisent aussi un terme d'arrêt sur les contours. Mais pour le mettre en place, ils utilisent de manière primordiale le fait que dans leur modèle, l'image à classer comporte des textures posées sur un fond (lui même texturé).

Dans le but de garder notre modèle de classification le plus général possible, nous avons donc décidé de ne pas utiliser un tel détecteur de contour. De plus, expérimentalement, on constate que les contours se stabilisent sans avoir à utiliser de fonctions d'arrêt.

### 7.1.3 Principe

Nous reprenons la démarche de Christophe Samson et al. qui ont développé un algorithme de classification supervisée pour les images optiques dans [151].

Nous supposons connu le nombre  $K$  de classes dans l'image, ainsi que leurs caractéristiques. Si  $1 \leq k \leq K$ , on note  $C_k$  la classe correspondante.

L'objectif est d'obtenir une partition de l'image par les différentes classes (nous considérons le problème de classification comme un problème de partition). Pour cela, nous allons minimiser une fonctionnelle comportant trois termes :

- (i) un terme de partition des classes (i.e. chaque pixel est classé dans une classe et une seule).
- (ii) un terme de régularisation des contours des classes.
- (iii) un terme d'attache aux données.

On utilise une approche variationnelle par ensembles de niveaux. Le domaine de l'image,  $\Omega$ , est la réunion d'ensembles  $\Omega_k$  disjoints. Chaque  $\Omega_k$  représente les régions de la classe  $k$  et peut être non convexe.  $\Omega_k$  est caractérisé par une fonction de niveau  $\Phi_k$ .

## 7.2 . Modélisation des textures par paquets d'ondelettes

Le principe général de la transformée en ondelettes est rappelé dans l'annexe A. Dans les paragraphes suivants, on précise quels types d'ondelettes nous allons utiliser.

### 7.2.1 Ondelettes non décimées

L'algorithme proposé par S.G. Mallat [124, 125, 123] donne une représentation non redondante d'un signal : après transformée en ondelettes, le nombre de coefficients à stocker reste le même que pour le signal initial. On parle alors d'ondelettes décimées (dans cet algorithme, le passage d'un ordre de décomposition au suivant se fait en utilisant une décimation après les filtrages passe-haut et passe-bas).

Cependant, l'utilisation des ondelettes décimées présente l'inconvénient de ne pas être (a priori) invariante par translation. Or l'objectif de notre travail est de classer des images texturées, et une texture est généralement invariante par translation. C'est pourquoi nous utiliserons des "wavelets frames" (cf [164]). La DWFT ("discrete wavelet frame transform")

$h_{LL}$	$h_{LH}$
$h_{HL}$	$h_{HH}$

FIG. 7.1 – Transformée en ondelettes et filtrage

correspond à la DWT (“discrete wavelet transform”) appliquée au signal d’entrée avec toutes les translations possibles. Cela revient à utiliser des ondelettes non décimées.

## 7.2.2 Transformée en paquets d’ondelettes

Un grand nombre de textures peuvent être modélisées comme des signaux quasi-périodiques (répétition d’un même motif avec de légères variations) dont les fréquences dominantes sont dans les canaux de fréquences médianes (cf [53]).

Or la DWT décompose un signal dans un ensemble de canaux de fréquences dont la largeur de la bande est plus étroite dans les régions de basse fréquence. Cela se révèle suffisant pour les signaux réguliers dont l’information est concentrée aux basses fréquences, mais pas pour les textures.

Notons  $h_{LL} = A_{2^{-1}}f$ ,  $h_{LH} = D_{2^{-1}}^1 f$ ,  $h_{HL} = D_{2^{-1}}^2 f$ ,  $h_{HH} = D_{2^{-1}}^3 f$  (en reprenant les notations de l’Annexe A). La figure 7.1 représente alors la transformée en ondelettes d’une image ( $h_{LL}$  correspond aux basses fréquences,  $h_{HH}$  aux hautes fréquences, et  $h_{HL}$  et  $h_{LH}$  aux fréquences médianes). Dans le cas de la DWT, seule  $h_{LL}$  est à nouveau redécomposée. Dans le cas des paquets d’ondelettes, tous les blocs peuvent être redécomposés (voir figure 7.2).

## 7.2.3 Indépendance vis à vis du niveau de gris

Lorsque l’on décompose une image à l’aide d’une transformée en ondelettes ou en paquets d’ondelettes, tous les blocs de la décomposition sont à moyennes nulles, à l’exception de celui des basses fréquences ( $h_{LL}$ , voir figure 7.1 et 7.2). Sa moyenne correspond en fait au niveau de gris moyen de l’image. Or notre objectif est de faire de la classification d’images texturées. On veut que deux textures possédant le même motif de base mais avec des moyennes de niveau de gris différentes soient affectées à la même classe : le niveau de gris moyen ne doit pas être une caractéristique d’une texture. C’est pourquoi nous modifions le bloc des basses fréquences en ramenant la moyenne à zéro.

## 7.2.4 Idée

On considère qu’une texture est caractérisée par l’énergie de ses coefficients en paquets d’ondelettes. Si on note  $z$  la fonction représentant cette texture, on peut écrire (en reprenant les notations de l’annexe A (cf (A.1.18))) :

$$z = \sum_k u_{J,k} \phi_{J,k} + \sum_{j=-J}^{-1} \sum_k w_{j,k} \psi_{j,k} \quad (7.2.1)$$

où  $\psi$  est l’ondelette mère,  $\phi$  la fonction d’échelle et  $J$  l’ordre de la décomposition (pour soucis de clarté, on utilise ici les notations 1D, mais le procédé est identique en 2D). On considère donc qu’une texture est caractérisée par la suite :

$$(|u_{J,k}|^2, k \in \mathbb{Z}), (|w_{j,k}|^2, k \in \mathbb{Z}, -J \leq j \leq -1) \quad (7.2.2)$$

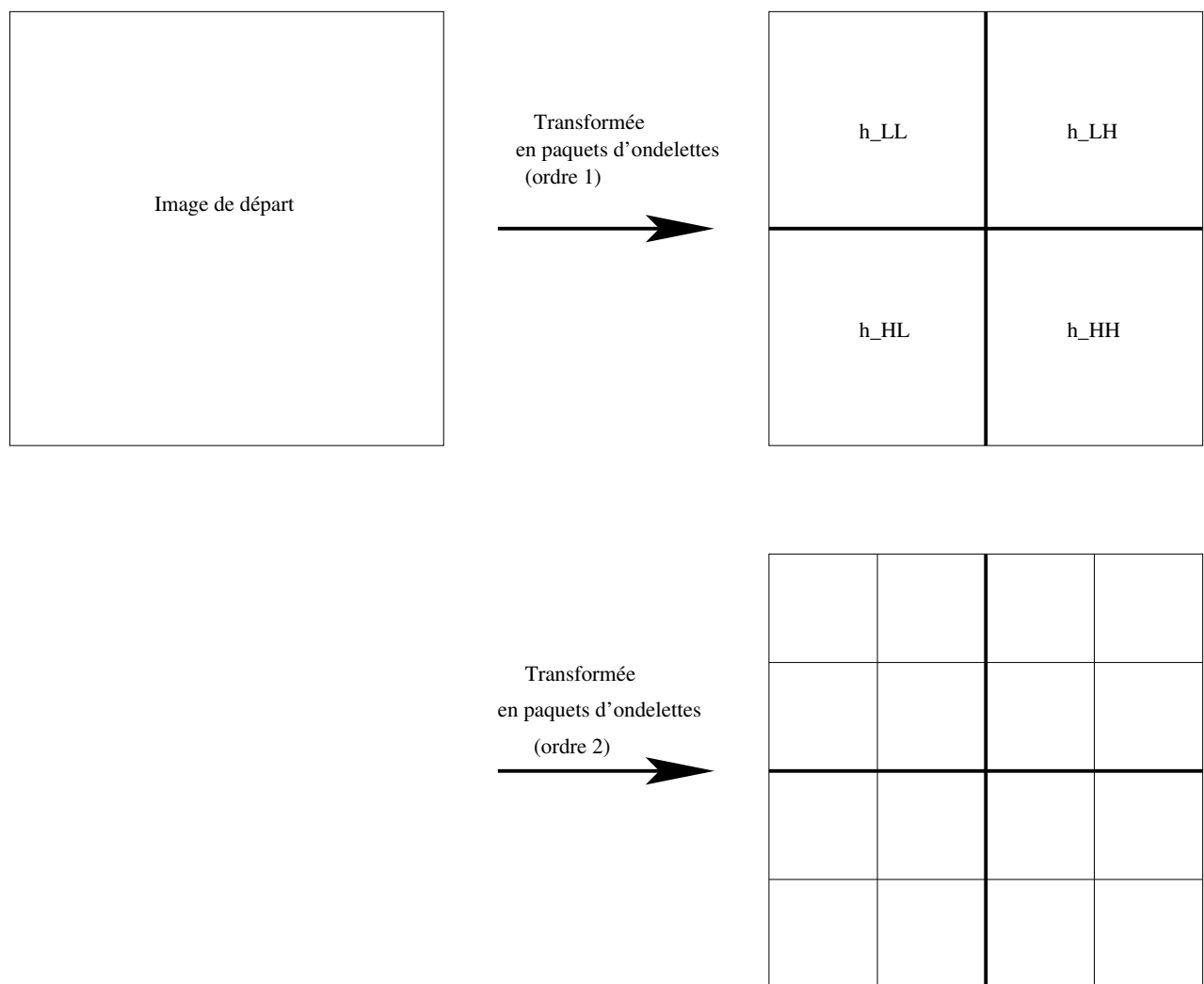


FIG. 7.2 – Décomposition en paquets d'ondelettes : à chaque étape, tous les blocs de la transformée en ondelettes sont redécomposés (on rappelle que  $h_{LL}$  désigne les basses fréquences,  $h_{HH}$  les hautes fréquences,  $h_{LH}$  et  $h_{HL}$  les fréquences médianes)

On effectue une transformée en paquets d'ondelettes, car on estime que l'information essentielle d'une texture est aussi contenue dans les moyennes fréquences (et pas seulement dans les hautes fréquences) [53]. On utilise des ondelettes non décimées (en pratique, la DWT est décimée mais on fait les translations nécessaires).

### 7.2.5 Loi de l'énergie

S.G. Mallat a vérifié expérimentalement (voir [124, 125]) que la distribution des modules des coefficients en ondelettes dans une sous-bande suit une loi gaussienne généralisée de la forme :

$$p_X(x) = A \exp \left( - \left( \frac{x}{\alpha} \right)^\beta \right) \mathbf{1}_{x \geq 0} \quad (7.2.3)$$

Ce sont des distributions très piquées. Le paramètre  $\beta$  modifie la décroissance du pic, et  $\alpha$  modélise la variance. Comme nous considérons que les textures sont caractérisées par leur énergie, nous sommes amenés à calculer la loi de distribution de probabilité des carrés des coefficients en ondelettes à l'intérieur d'une même sous-bande. Nous l'obtenons à l'aide de (7.2.3) (avec  $X \geq 0$ ) :

$$\begin{aligned} P(X^2 \leq a) &= P(X \leq \sqrt{a}) \\ &= \int_0^{\sqrt{a}} p_X dx \\ &= A \int_0^{\sqrt{a}} \exp \left( - \left( \frac{x}{\alpha} \right)^\beta \right) \mathbf{1}_{x \geq 0} dx \end{aligned}$$

On fait le changement de variable  $x = \sqrt{y}$ , et on obtient ainsi (pour  $a \geq 0$ ) :

$$P(X^2 \leq a) = \frac{A}{2} \int_0^a \exp \left( - \left( \frac{\sqrt{y}}{\alpha} \right)^\beta \right) \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

D'où :

$$p_{X^2}(y) = \frac{A}{2\sqrt{y}} \exp \left( - \left( \frac{\sqrt{y}}{\alpha} \right)^\beta \right) \mathbf{1}_{y \geq 0} \quad (7.2.4)$$

Ce type de distribution est encore plus piqué que celui donné par (7.2.3). Le paramètre  $\beta$  modifie la décroissance du pic, et  $\alpha$  modélise la variance.

Expérimentalement, nous avons vérifié que la distribution de l'énergie dans une sous-bande était bien approchée par une loi de ce type (voir figure 7.3).

### 7.2.6 Calcul des paramètres de la loi de distribution de l'énergie en fonction des moments d'ordre un et deux

Notre objectif est de faire de la classification supervisée d'images texturées. "Supervisée" signifie le fait de connaître a priori le nombre de classes présentes dans l'image, ainsi que les paramètres de chaque classe. Les paramètres de classe  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent être calculés à partir des moments d'ordre un et deux de la distribution de l'énergie dans chaque sous-bande. Calculons en effet ces moments.

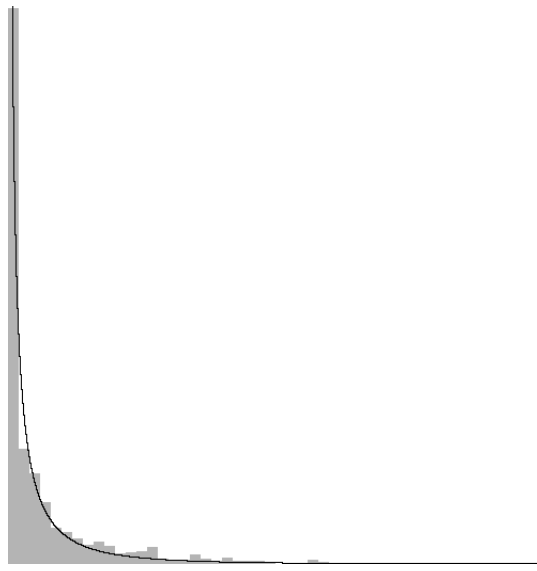


FIG. 7.3 – Graphe théorique de la distribution de l'énergie dans une sous-bande (loi (7.2.4)) et histogramme expérimental (dans une sous-bande de la transformée en paquet d'ondelettes de la texture en haut à droite de la Figure 7.10) ( $\alpha = 40.44$  et  $\beta = 1.537$ ) ( $\alpha$  et  $\beta$  sont calculés avec (7.2.11) et (7.2.13)).

On rappelle que la fonction  $\Gamma$  est définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{t-1} du \quad (7.2.5)$$

**Lemme 7.2.1.** *Le paramètre  $A$  de la loi (7.2.4) s'écrit :*

$$A = \frac{\beta}{\alpha \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)} \quad (7.2.6)$$

**Preuve :**

$$1 = \int_{\mathbb{R}} p_X(x) dx = A \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right) dx \quad (7.2.7)$$

On pose alors  $z = \frac{x}{\alpha}$  :

$$1 = \alpha A \int_0^{+\infty} \exp(-z^\beta) dz \quad (7.2.8)$$

Puis  $u = z^\beta$  :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\alpha A}{\beta} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1-\beta}{\beta}} du \\ &= \frac{\alpha A}{\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) \end{aligned}$$

(grâce à (7.2.5)). D'où la formule (7.2.6).

■



On note  $Y = X^2$ ,  $M_1 = E(Y)$  et  $M_2 = E(Y^2)$  les moments d'ordre un et deux de  $Y$ , où :

$$E(Z) = \int_{\mathbb{R}} p_Z(z) dz$$

**Lemme 7.2.2.** *Les moments d'ordre un et deux de  $Y$  sont donnés par :*

$$M_1 = E(Y) = \frac{\alpha^3 A}{\beta} \Gamma\left(\frac{3}{\beta}\right) \quad (7.2.9)$$

$$M_2 = E(Y^2) = \frac{\alpha^5 A}{\beta} \Gamma\left(\frac{5}{\beta}\right) \quad (7.2.10)$$

De (7.2.9) et (7.2.10), on tire :

$$\alpha = \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\beta}\right) M_2}{\Gamma\left(\frac{5}{\beta}\right) M_1}} \quad (7.2.11)$$

et

$$\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) \Gamma\left(\frac{5}{\beta}\right)} = \frac{M_2}{M_1} \quad (7.2.12)$$

Donc :

$$\beta = F^{-1}\left(\frac{M_1^2}{M_2}\right) \quad (7.2.13)$$

où :

$$F(x) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{x}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{x}\right) \Gamma\left(\frac{5}{x}\right)} \quad (7.2.14)$$

Le graphe de  $F^{-1}$  est donné sur la figure 7.4. En pratique, les valeurs de  $\frac{M_1^2}{M_2}$  sont dans l'intervalle  $]0.1, 0.45[$ , aux points où  $F^{-1}$  est stable.

**Preuve du Lemme 7.2.2 :** On découpe la preuve en deux parties.

Etape 1 : On commence par montrer (7.2.9).

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} \frac{A}{2} \frac{y}{\sqrt{y}} \exp - \left(\frac{\sqrt{y}}{\alpha}\right)^\beta dy \quad (7.2.15)$$

On pose  $x = \sqrt{y}$  :

$$E(X^2) = \frac{A}{2} \int_0^{+\infty} 2x^2 \exp - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta dx \quad (7.2.16)$$

Puis  $v = \frac{x}{\alpha}$  :

$$E(X^2) = \alpha A \int_0^{+\infty} \alpha^2 v^2 \exp - (v)^\beta dv \quad (7.2.17)$$

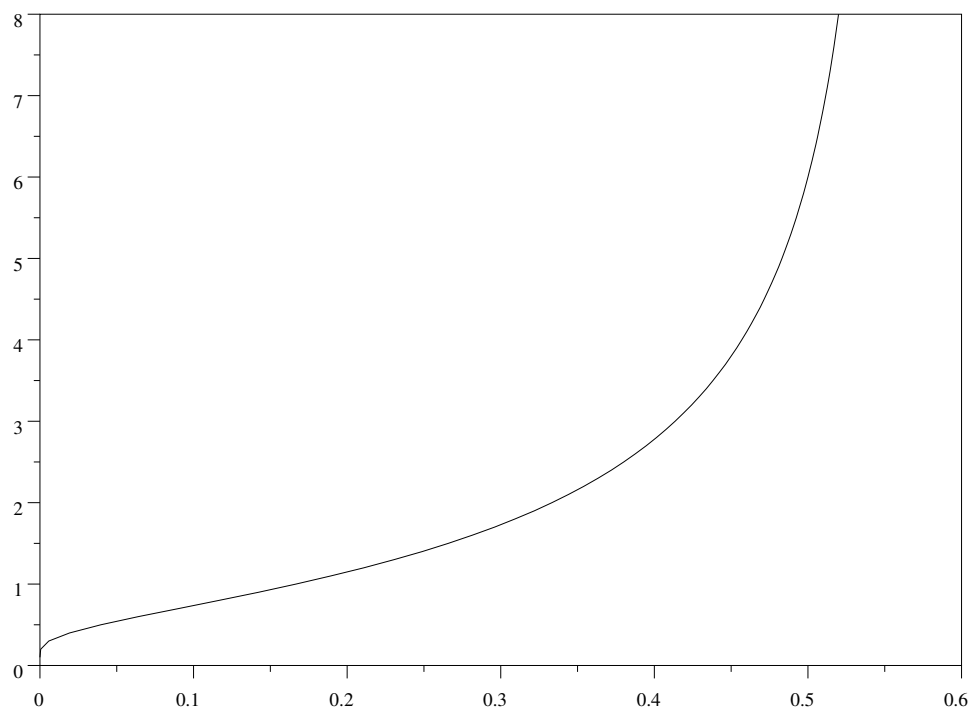


FIG. 7.4 – Graphe de  $F^{-1}$  (donné par (7.2.14))

Ensuite,  $v = u^{\frac{1}{\beta}}$  :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{\alpha^3 A}{\beta} \int_0^{+\infty} u^{\frac{2}{\beta}} e^{-u} u^{\frac{1}{\beta}-1} du \\ &= \frac{\alpha^3 A}{\beta} \int_0^{+\infty} u^{\frac{3}{\beta}-1} e^{-u} du \end{aligned}$$

D'où (avec (7.2.5)) :

$$E(X^2) = \frac{\alpha^3 A}{\beta} \Gamma\left(\frac{3}{\beta}\right) = E(Y) \quad (7.2.18)$$

i.e. la preuve de (7.2.9).

Etape 2 : On montre maintenant (7.2.10).

$$E(Y^2) = \int_0^{+\infty} \frac{A}{2} \frac{y^2}{\sqrt{y}} \exp - \left( \frac{\sqrt{y}}{\alpha} \right)^\beta dy \quad (7.2.19)$$

On pose  $x = \sqrt{y}$  :

$$E(Y^2) = \frac{A}{2} \int_0^{+\infty} 2x^4 \exp - \left( \frac{x}{\alpha} \right)^\beta dx \quad (7.2.20)$$

Puis  $v = \frac{x}{\alpha}$  :

$$E(Y^2) = \alpha A \int_0^{+\infty} \alpha^4 v^4 \exp - (v)^\beta dv \quad (7.2.21)$$

Ensuite,  $v = u^{\frac{1}{\beta}}$  :

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \frac{\alpha^5 A}{\beta} \int_0^{+\infty} u^{\frac{4}{\beta}} e^{-u} u^{\frac{1}{\beta}-1} du \\ &= \frac{\alpha^5 A}{\beta} \int_0^{+\infty} u^{\frac{5}{\beta}-1} e^{-u} du \end{aligned}$$

ce qui entraîne (avec (7.2.5)) :

$$E(Y^2) = \frac{\alpha^5 A}{\beta} \Gamma\left(\frac{5}{\beta}\right) = E(X^4) \quad (7.2.22)$$

Et on obtient donc bien (7.2.10). ■

## 7.3 . Energie associée au problème de classification

Dans cette section, nous allons construire la fonctionnelle de classification. Pour cela, nous aurons besoin de quelques outils et notations que nous introduisons dans les deux sous-sections suivantes.

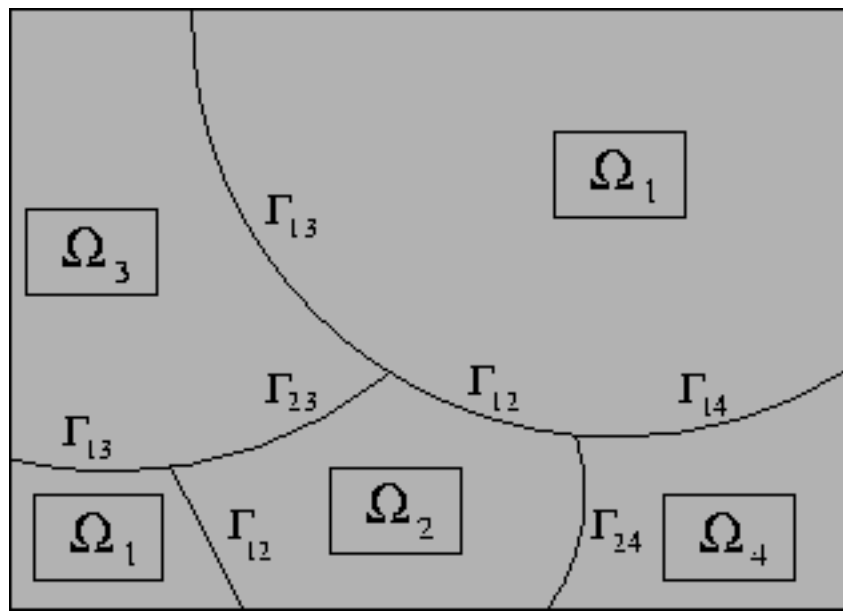


FIG. 7.5 – Classification vue comme un problème de partition

### 7.3.1 Partition, approche par courbes de niveaux

On considère l'image comme une fonction  $u_0 : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  (où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ).

On note  $\Omega_k = \{x \in \Omega / x \text{ est dans la classe } k\}$ . La collection d'ouverts  $\{\Omega_k\}$  forme une partition de  $\Omega$  si et seulement si :

$$\Omega = \bigcup_k \Omega_k \bigcup_k \Gamma_k, \text{ et si } k \neq l \quad \Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset$$

où on a noté  $\Gamma_k = \partial\Omega_k \cap \Omega$  le bord de  $\Omega_k$  (excepté les points communs à  $\partial\Omega$ ), et  $\Gamma_{kl} = \Gamma_{lk} = \Gamma_k \cap \Gamma_l \cap \Omega$  (voir figure 7.5).

Afin d'obtenir une formulation fonctionnelle plutôt qu'une formulation ensembliste, nous supposons que pour chaque  $\Omega_k$  il existe une fonction lipschitzienne  $\Phi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\begin{cases} \Phi_k(x) > 0 & \text{si } x \in \Omega_k \\ \Phi_k(x) = 0 & \text{si } x \in \Gamma_k \\ \Phi_k(x) < 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\Omega_k$  est ainsi entièrement déterminé par  $\Phi_k$ .

### 7.3.2 Régularisation

Nous utiliserons plus loin les distributions de Dirac  $\delta$  et Heaviside  $H$ . Pour que ce que nous écrivons ait un sens mathématique, nous aurons besoin des approximations régulières classiques suivantes de ces distributions (voir figure 7.6) :

$$\delta_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} \left(1 + \cos \frac{\pi s}{\alpha}\right) & \text{si } |s| \leq \alpha \\ 0 & \text{si } |s| > \alpha \end{cases} \quad (7.3.1)$$

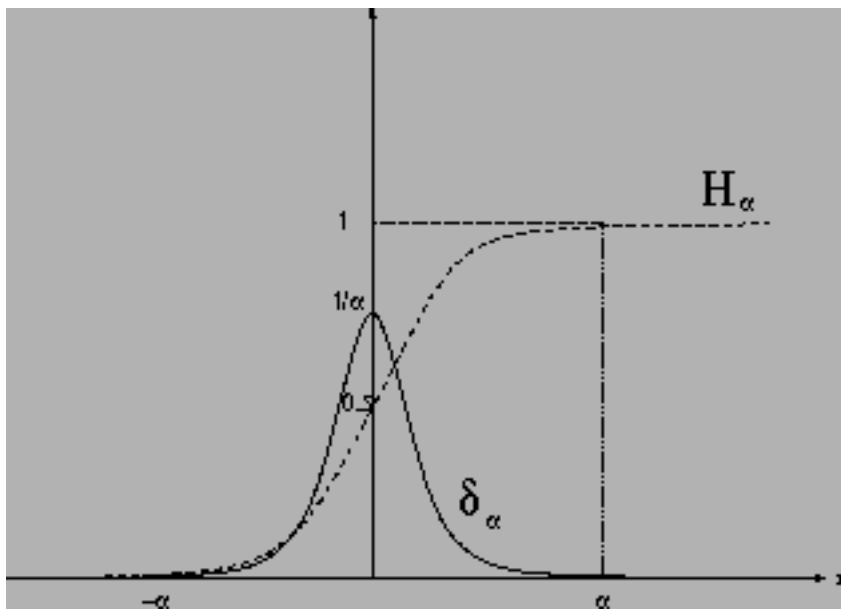


FIG. 7.6 – Approximations  $\delta_\alpha$  et  $H_\alpha$  des distributions de Dirac et de Heaviside

$$H_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{s}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi s}{\alpha} \right) & \text{si } |s| \leq \alpha \\ 1 & \text{si } s > \alpha \\ 0 & \text{si } s < -\alpha \end{cases} \quad (7.3.2)$$

Quand  $\alpha \rightarrow 0$ , on a  $\delta_\alpha \rightarrow \delta$  et  $H_\alpha \rightarrow H$  (au sens des distributions).

La figure 7.7 montre comment les régions sont définies par ces distributions et les ensembles de niveaux. On a :

$$\int_{\Omega_k} f(x) dx = \int_{\Omega} H(\phi_k) f(x) dx \quad (7.3.3)$$

### 7.3.3 Termes d'énergie

Pour construire l'énergie, nous reprenons l'approche de [151]. La fonctionnelle va comporter trois termes :

1.

$$F_\alpha^A(\Phi_1, \dots, \Phi_K) = \lambda \int_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^K H_\alpha(\Phi_k) - 1 \right)^2 \quad (7.3.4)$$

Ce terme d'énergie assure que le résultat de la minimisation de la fonctionnelle forme bien une partition de l'image. Il pénalise en effet les pixels non classés, ainsi que les pixels classés dans au moins deux régions simultanément. En fait, pour avoir une partition de  $\Omega$ , il nous faudrait avoir  $\sum_{k=1}^K H(\Phi_k(x)) = 1 \forall x \in \Omega$ . Nous nous contentons de chercher à minimiser l'erreur quadratique avec  $H$  approchée par  $H_\alpha$ , ce qui se révèle beaucoup plus simple.

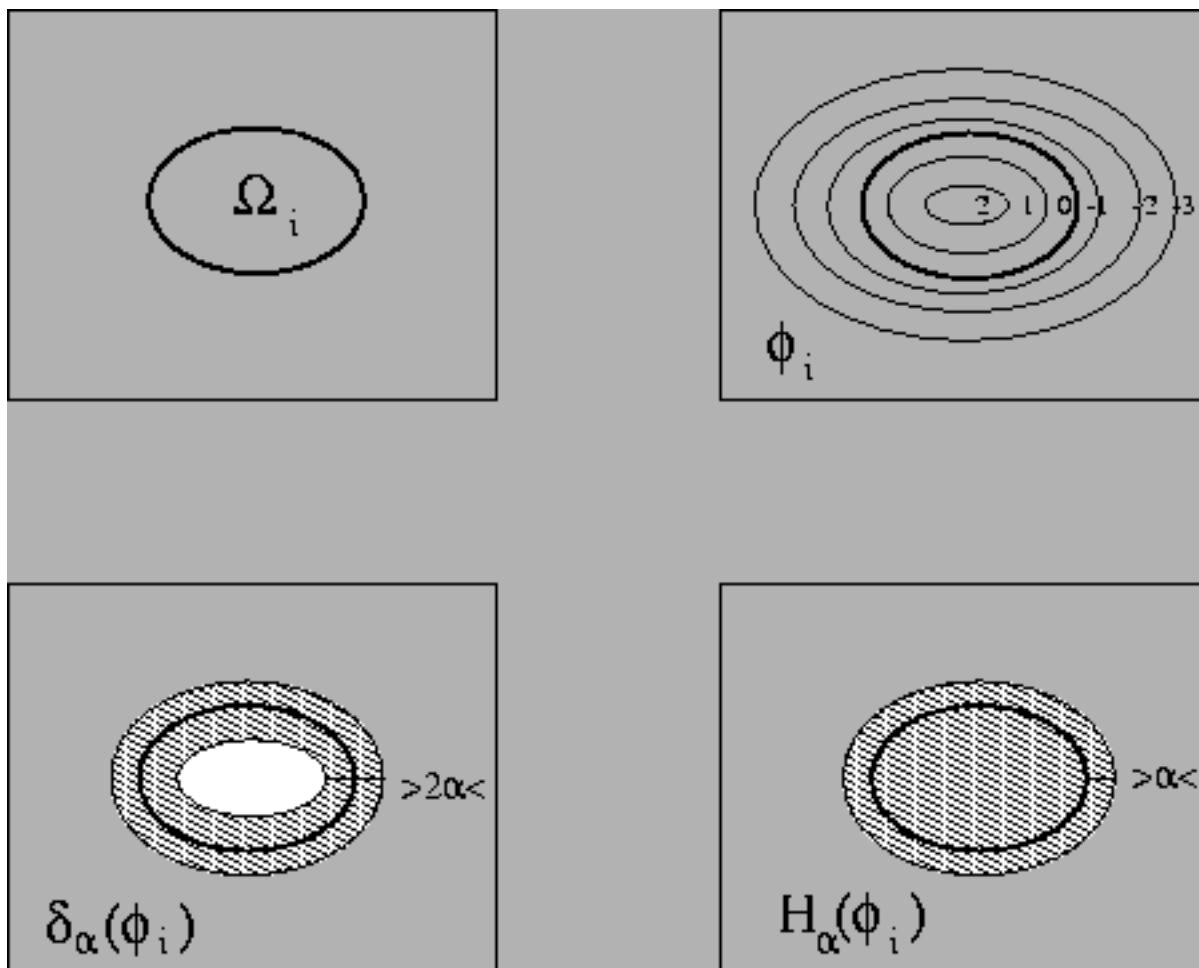


FIG. 7.7 – Définitions des régions et de leurs contours par ensemble de niveau.

2.

$$F^B(\Phi_1, \dots, \Phi_K) = \sum_{k=1}^K \gamma_k |\Gamma_k| \quad (7.3.5)$$

Ce terme pénalise la longueur des contours, ce qui empêche d'avoir des contours trop irréguliers. On peut montrer, en utilisant la formule de la co-aire, que (la démonstration est donnée dans [151]) :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\Omega} \delta_{\alpha}(\Phi_k) |\nabla \Phi_k| dx = |\Gamma_k| \quad (7.3.6)$$

En pratique, on cherche donc à minimiser :

$$F_{\alpha}^B(\Phi_1, \dots, \Phi_K) = \sum_{k=1}^K \gamma_k \int_{\Omega} \delta_{\alpha}(\Phi_k) |\nabla \Phi_k| \quad (7.3.7)$$

3.

$$F^C(\Phi_1, \dots, \Phi_K) \quad (7.3.8)$$

Ce dernier terme constitue le terme d'attache aux données que nous allons obtenir grâce à notre modélisation des textures et au principe du maximum de vraisemblance (cf sous-section 7.3.4).

**Energie totale :** L'énergie que nous voulons minimiser est la somme des trois termes précédents :

$$F(\Phi_1, \dots, \Phi_K) = F^A(\Phi_1, \dots, \Phi_K) + F^B(\Phi_1, \dots, \Phi_K) + F^C(\Phi_1, \dots, \Phi_K) \quad (7.3.9)$$

**Remarque :** Il faut noter que, contrairement au modèle proposé dans [151], nous ne disposons pas d'une fonction d'arrêt sur les contours : la fonction utilisée dans [151] était basée sur le gradient de l'image, et comme nous nous intéressons ici à des images texturées, une telle approche n'est plus possible. D'une manière générale, dans le cas d'une image texturée, les forts gradients ne marquent pas forcément un changement de textures, et deux textures différentes peuvent avoir en moyenne le même niveau de gris.

### 7.3.4 Terme d'attache aux données

On fait une décomposition de l'image en paquets d'ondelettes : on obtient I canaux (en pratique, on utilise une décomposition à 2 niveaux, et donc I=16).

**Hypothèses :**

(H7.3.1) On suppose que, pour chaque texture  $k = 1 \dots K$ , dans chaque canal  $i = 1 \dots I$ , l'énergie suit une loi du type (7.2.4) de moyenne  $M_1^{k,i}$  et de moment d'ordre deux  $M_2^{k,i}$ .

(H7.3.2) On suppose que les canaux sont indépendants.

$k$  indique la classe, et  $i$  le canal.

Comme nous l'avons indiqué précédemment, notre objectif est de faire de la classification supervisée. Les moments d'ordre un et deux ( $M_1^{k,i}$  et  $M_2^{k,i}$ ) sont supposés connus par l'utilisateur.

Le but est de chercher en chaque point les classes qui rendent l'énergie observée  $U$  la plus vraisemblable ( $U$  correspond à l'énergie de la décomposition en ondelettes qui nous permet de caractériser les textures).

On rappelle que  $U = (U_1, \dots, U_I)$ , où  $U_i$  est l'énergie dans le canal  $i$  (i.e. le carré du coefficient en paquets d'ondelettes dans la sous-bande  $i$ ).

On commence par raisonner en variables discrètes. On discrétise l'espace  $\Omega$  : on considère qu'il est formé par l'ensemble des pixels (sites) de l'image. On note  $S$  l'ensemble des sites. On veut maximiser  $P(U|Cl)$ .

**Remarque :**  $P(U(s) = u | Cl_s = k)$  est la probabilité que l'énergie  $U$  au pixel  $s$  ait la valeur  $u$  sachant que le pixel  $s$  est dans la classe  $k$ . Maximiser  $P(U(s) | Cl_s)$  revient donc à chercher la classe qui rend l'énergie la plus vraisemblable pour le pixel  $s$  lorsque son énergie vaut  $U(s)$ . Et maximiser  $P(U | Cl)$  revient en fait à chercher la classe rendant l'énergie  $U$  la plus probable pour chaque pixel en fonction de leur énergie (ce qui résout le problème de classification dans le cas où on ne tient compte que du terme d'attache aux données).

**Calcul du maximum de vraisemblance (MV) :** Rappelons pour fixer les notations utilisées dans la suite :

- $K$  est le nombre de classes.
- $I$  est le nombre de canaux (en pratique,  $I=16$ ).
- $\alpha_k^i$  et  $\beta_k^i$  sont les paramètres de la loi de probabilité de l'énergie de la classe  $k$  dans le canal  $i$ .
- $u_i(s)$  est la valeur de l'énergie dans le canal  $i$  (i.e. du carré du coefficient en paquets d'ondelettes au pixel  $s$  dans la sous-bande  $i$ ).
- $u(s)$  est la valeur de l'énergie en  $s$  :  $u(s) = (u_1(s), \dots, u_I(s))$ .

On va en fait maximiser la log-vraisemblance, ce qui revient à minimiser (on note  $Cl_s$  la classe supposée pour le pixel  $s$ ) :

$$\begin{aligned} -\ln(P(U|Cl)) &= -\sum_{s \in S} \ln(P(U_s | Cl_s)) \\ &= -\sum_{s \in S} \sum_{k=1}^K \ln(P(U_s | Cl_s) \delta_k(s)) \\ &= -\sum_{k=1}^K \sum_{s \in S} \ln(P(U_s | Cl_s) \delta_k(s)) \end{aligned}$$

où  $\delta_k(s) = 1$  si  $s$  est dans la classe  $k$ , 0 sinon.

D'après les hypothèses (H 7.3.1) et (H 7.3.2), on a :

$$P(U(s) | Cl_s = k) = \prod_{i=1}^I \frac{A_k^i}{2\sqrt{u_i(s)}} \exp \left( - \left( \frac{\sqrt{u_i(s)}}{\alpha_k^i} \right)^{\beta_k^i} \right) \quad (7.3.10)$$



Les paramètres  $A_k^i$ ,  $\alpha_k^i$  et  $\beta_k^i$  s'obtiennent à partir des moments d'ordre un et deux grâce aux formules (7.2.6), (7.2.11) et (7.2.13).

On déduit de (7.3.10) :

$$-\ln(P(U|Cl)) = -\sum_{k=1}^K \sum_{s \in S} \sum_{i=1}^I \left( \ln A_k^i - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln u_i(s) - \left( \frac{\sqrt{u_i(s)}}{\alpha_k^i} \right)^{\beta_k^i} \right) \delta_k(Cl_s) \quad (7.3.11)$$

On réécrit ensuite le résultat précédent avec des notations continues :  $s$  tel que  $\delta_k(Cl_s) = 1$  si et seulement si  $x \in \Omega_k$ .

$$-\ln(P(U|Cl)) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I \int_{\Omega_k} \left( -\ln A_k^i + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln u_i(x) + \left( \frac{\sqrt{u_i(x)}}{\alpha_k^i} \right)^{\beta_k^i} \right) dx \quad (7.3.12)$$

D'où :

$$F^C(\Phi_1, \dots, \Phi_K) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I \int_{\Omega_k} \left( -\ln A_k^i + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln u_i(x) + \left( \frac{\sqrt{u_i(x)}}{\alpha_k^i} \right)^{\beta_k^i} \right) dx \quad (7.3.13)$$

Donc :

$$F_\alpha^C(\Phi_1, \dots, \Phi_K) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I \int_{\Omega} H_\alpha(\Phi_k) \left( -\ln A_k^i + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln u_i(x) + \left( \frac{\sqrt{u_i(x)}}{\alpha_k^i} \right)^{\beta_k^i} \right) dx \quad (7.3.14)$$

### 7.3.5 La fonctionnelle finale

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire complètement la fonctionnelle modélisant le problème de classification d'images texturées :

$$\begin{aligned} F(\Phi_1, \dots, \Phi_K) &= \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^K H_\alpha(\Phi_k) - 1 \right)^2 + \sum_{k=1}^K \gamma_k \int_{\Omega} \delta_\alpha(\Phi_k) |\nabla \Phi_k| \\ &\quad + \sum_{k=1}^K e_k \sum_{i=1}^I \int_{\Omega} H_\alpha(\Phi_k) \left( -\ln A_k^i + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln u_i(x) + \left( \frac{\sqrt{u_i(x)}}{\alpha_k^i} \right)^{\beta_k^i} \right) dx \end{aligned} \quad (7.3.15)$$

On a introduit des poids positifs devant chaque terme d'énergie de notre fonctionnelle de manière à pouvoir, le cas échéant, utiliser plus d'a priori sur les données. En effet, si la classe  $k$  a une grande probabilité de présence, on pourra décider d'utiliser une petite valeur pour  $e_k$  (afin de favoriser la classe  $k$ ). Si l'on sait que la classe  $k$  a des bords très réguliers par rapport à ceux des autres classes, on pourra choisir une grande valeur pour  $\gamma_k$  (afin d'augmenter l'importance du terme de minimisation de la longueur du bord de la classe  $k$ ). Quand au paramètre  $\lambda$ , il permet de forcer la classification des pixels (si  $\lambda$  est grand, tous les pixels sont classifiés, et au contraire si  $\lambda$  est petit, aucun pixel n'est classifié).

**Etude mathématique :** Les résultats classiques relatifs à la minimisation ne s'applique pas à la fonctionnelle (7.3.15) (celle-ci n'est ni convexe, ni coercive). Nous effectuons son étude théorique au Chapitre 8.

### 7.3.6 Remarques

#### Utilisation d'une fenêtre

Pour obtenir des résultats plus réguliers, nous avons parfois eu recours à l'utilisation d'une fenêtre pour calculer le terme d'attache au donné. Dans ce cas, l'énergie associée à un pixel  $s$ , dans le canal  $i$ , est en fait une moyenne pondérée des énergies dans ce canal des pixels contenus dans une fenêtre autour du pixel  $s$  considéré. Nous avons constaté que l'utilisation d'une moyenne arithmétique détériorait la précision des contours des classes. Dans la pratique, lorsque nous employons une fenêtre, nous utilisons un masque gaussien.

Cependant, la plupart du temps, nous n'avons pas utilisé de fenêtre de moyennage. En effet, les coefficients en ondelettes en un point dépendent déjà des valeurs des pixels voisins.

#### Autres critères

Nous avons essayé d'autres critères que l'énergie, notamment l'entropie. Mais dans nos tests préliminaires, l'énergie s'est affirmée comme le critère le plus intéressant.

De plus, dans [153], il est précisé que Laine et Fane ont constaté expérimentalement que l'énergie est mieux adaptée que l'entropie comme caractéristique d'une texture (cf [107]). C'est pourquoi nous avons considéré l'énergie.

## 7.4 . Etude numérique

### 7.4.1 Equations d'Euler-Lagrange

Rappelons ici la fonctionnelle que nous cherchons à minimiser (pour résoudre le problème de classification) :

$$\begin{aligned} F(\Phi_1, \dots, \Phi_K) = & \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^K H_{\alpha}(\Phi_k) - 1 \right)^2 + \sum_{k=1}^K \gamma_k \int_{\Omega} \delta_{\alpha}(\Phi_k) |\nabla \Phi_k| \\ & + \sum_{k=1}^K e_k \sum_{i=1}^I \int_{\Omega} H_{\alpha}(\Phi_k) \left( -\ln A_k^i + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln u_i(x) + \left( \frac{\sqrt{u_i(x)}}{\alpha_k^i} \right)^{\beta_k^i} \right) dx \end{aligned} \quad (7.4.1)$$

Si  $\Phi_1, \dots, \Phi_K$  minimisent la fonctionnelle  $F$ , alors nécessairement (si en plus les  $\Phi_1, \dots, \Phi_K$  vérifient certaines conditions de régularité (voir [79] par exemple)), on a pour  $k = 1 \dots K$  :

$$\frac{\partial F}{\partial \Phi_k} = 0 \quad (7.4.2)$$

En supposant que des conditions de Neumann sont vérifiées ( $\frac{\partial \Phi_k}{\partial \bar{n}}(x) = 0$ ,  $\forall x \in \partial\Omega$ ), les équations d'Euler Lagrange associées à  $F$  (cf [79]) donnent le système suivant formé de  $K$  EDP couplées : on a pour  $k = 1 \dots K$

$$\begin{aligned}
0 = & \lambda \delta_\alpha(\Phi_k) \left( \sum_{q=1}^K H_\alpha(\Phi_q) - 1 \right) - \gamma_k \delta_\alpha(\Phi_k) \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \Phi_k}{|\nabla \Phi_k|} \right) \\
& + e_k \delta_\alpha(\Phi_k) \left( \sum_{i=1}^I \left( -\ln A_k^i + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln u_k^i + \left( \frac{\sqrt{u_k^i}}{\alpha_k^i} \right)^{\beta_k^i} \right) \right)
\end{aligned} \tag{7.4.3}$$

Le terme  $\operatorname{div} \left( \frac{\nabla \Phi_k}{|\nabla \Phi_k|} \right)$  s'interprète comme la courbure moyenne de la courbe de niveau  $\Phi_k$  au point  $x$ .

## 7.4.2 Schéma dynamique

Nous faisons maintenant dépendre les fonctions  $\Phi_k$  du temps :  $\Phi(t, x)$ .

Pour résoudre le système d'EDP (7.4.3), nous utilisons le schéma dynamique suivant ( $k = 1 \dots K$ ) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} = & -\delta_\alpha(\Phi_k) \left[ 2\lambda \left( \sum_{q=1}^K H_\alpha(\Phi_q) - 1 \right) - \gamma_k \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \Phi_k}{|\nabla \Phi_k|} \right) \right. \\
& \left. + e_k \left( \sum_{i=1}^I \left( -\ln A_k^i + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln u_i(x) + \left( \frac{\sqrt{u_i(x)}}{\alpha_k^i} \right)^{\beta_k^i} \right) \right) \right]
\end{aligned} \tag{7.4.4}$$

avec comme condition initiale  $\Phi_k(0, x)$  fonction distance signée euclidienne à la courbe de niveau zéro de  $\Phi_k$ .

On discrétise ce système par différences finies. On fixe arbitrairement  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  (dans nos expériences, nous avons utilisé  $\alpha = 3.0$ ). Il faut fixer  $\alpha$  suffisamment petit pour que les approximations des distributions de Dirac et de Heaviside ( $\delta_\alpha$  et  $H_\alpha$ ) restent valables. D'autre part, la largeur des bandes sur lesquelles les EDP (7.4.4) opèrent est de  $2\alpha - 1$  pixels (si  $\alpha \in \mathbb{N}$ ) Il faut donc que  $\alpha$  ne soit pas trop petit pour que cette bande contienne suffisamment de pixels pour calculer les différents termes de (7.4.4).

## 7.4.3 Réinitialisation

Les fonctions  $\Phi_k$  sont initialisées comme étant les fonctions distances signées euclidiennes. Cependant, comme dans la méthode classique des contours actifs par courbe de niveau (cf l'Annexe D et [17]), l'évolution des  $\Phi_k$  selon (7.4.4) ne les conserve pas en général comme des fonctions distances signées euclidiennes à leur courbe de niveau zéro. Ceci pénalise la convergence de (7.4.4) vers des  $\Phi_k$  minimisant  $F$ .

C'est pourquoi il est nécessaire de réinitialiser périodiquement les fonctions  $\Phi_k$  en des fonctions distances signées euclidiennes (dans nos expériences, nous réinitialisons les  $\Phi_k$  toutes les trois itérations de (7.4.4)). C'est un problème général de l'approche des contours actifs par courbes de niveaux. Pour des raisons de vitesse de convergence et de précision numérique [90, 158, 146, 1], il est intéressant que les  $\Phi_k$  vérifient :

$$0 < A < |\nabla \Phi_k| < B < \infty$$

Et c'est justement le cas lorsque les  $\Phi_k$  sont des fonctions distances signées euclidiennes : on a alors  $|\nabla\Phi_k|(x) = 1$  presque partout en  $x$  (cf Proposition 9.2.1).

Pour réinitialiser  $\Phi_k$  en la fonction distance signée euclidienne, nous utilisons l'EDP :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \text{signe}(\Phi_k)(|\nabla\Phi| - 1) = 0 \quad (7.4.5)$$

Nous effectuerons l'étude théorique rigoureuse de cette EDP, ainsi qu'une généralisation à des opérateurs Hamiltoniens plus généraux au Chapitre 9. On montrera notamment que, si  $\Phi(0, x) = \Phi_k(x)$ , la solution de viscosité de (7.4.5) converge vers la fonction distance signée euclidienne à la courbe de niveau zéro de  $\Phi_k$  (cf Théorème 9.3.1).

En pratique, les  $\Phi_k$  sont réinitialisés en fonctions distances signées euclidiennes à leur courbe de niveau zéro sur un voisinage de leur courbe de niveau zéro (il n'est pas nécessaire de calculer les  $\Phi_k$  dans toute l'image, ce qui accélère considérablement l'algorithme). La largeur de ces voisinages étant fixée, le Théorème 9.3.1 donne alors le nombre d'itérations à effectuer avec l'EDP (7.4.5) pour réinitialiser exactement les  $\Phi_k$  dans ces voisinages.

#### 7.4.4 Algorithme

**Ondelettes :** Comme nous l'avons expliqué dans ce qui précède, nous avons choisi pour nos expériences d'utiliser des paquets d'ondelettes à l'ordre deux pour calculer le terme d'attache aux données. Nous avons testé différentes ondelettes, et nous avons choisi d'utiliser l'ondelette de Daubechies à dix moments nuls (cf [69, 125]), cette dernière semblant donner les meilleurs résultats.

**Données rentrées par l'utilisateur :** Comme la classification est ici supervisée, l'utilisateur doit rentrer le nombre de classes (textures), ainsi que les paramètres de chaque classe (les moments d'ordre un et deux de la distribution de l'énergie dans chaque sous-bande de la décomposition en paquets d'ondelettes).

**Paramètres :** Dans nos expériences, nous prenons toujours  $e_1 = \dots = e_K = 1.0$  et  $\gamma_1 = \dots = \gamma_K = \gamma$  ( $\gamma \in \mathbb{R}$ ). Il ne reste alors plus que deux paramètres à fixer : le coefficient du terme de partition  $\lambda$ , et la valeur commune des termes de régularisation des contours  $\gamma$ .

**Initialisation :** Dans un premier temps, nous avons procédé à une initialisation manuelle avec des cercles comme dans [151]. Chaque cercle représente alors la courbe de niveau zéro de l'une des classes (voir figure 7.8).

Pour automatiser l'initialisation, et surtout pour la rendre indépendante de l'utilisateur, nous avons par la suite eu recours à des germes ("seeds") : on découpe l'image initiale en petites sous-images. Dans chaque sous-image, pour chaque classe  $k$ , on calcule le terme d'attache aux données en supposant que tous les pixels de la sous-images sont dans la classe  $k$ . On affecte tous les pixels d'une sous-image à la classe  $k$  pour laquelle l'énergie globale de la sous-image est minimale (voir figure 7.9). C'est ce type d'initialisation que nous avons utilisée dans les exemples présentés ci-après.

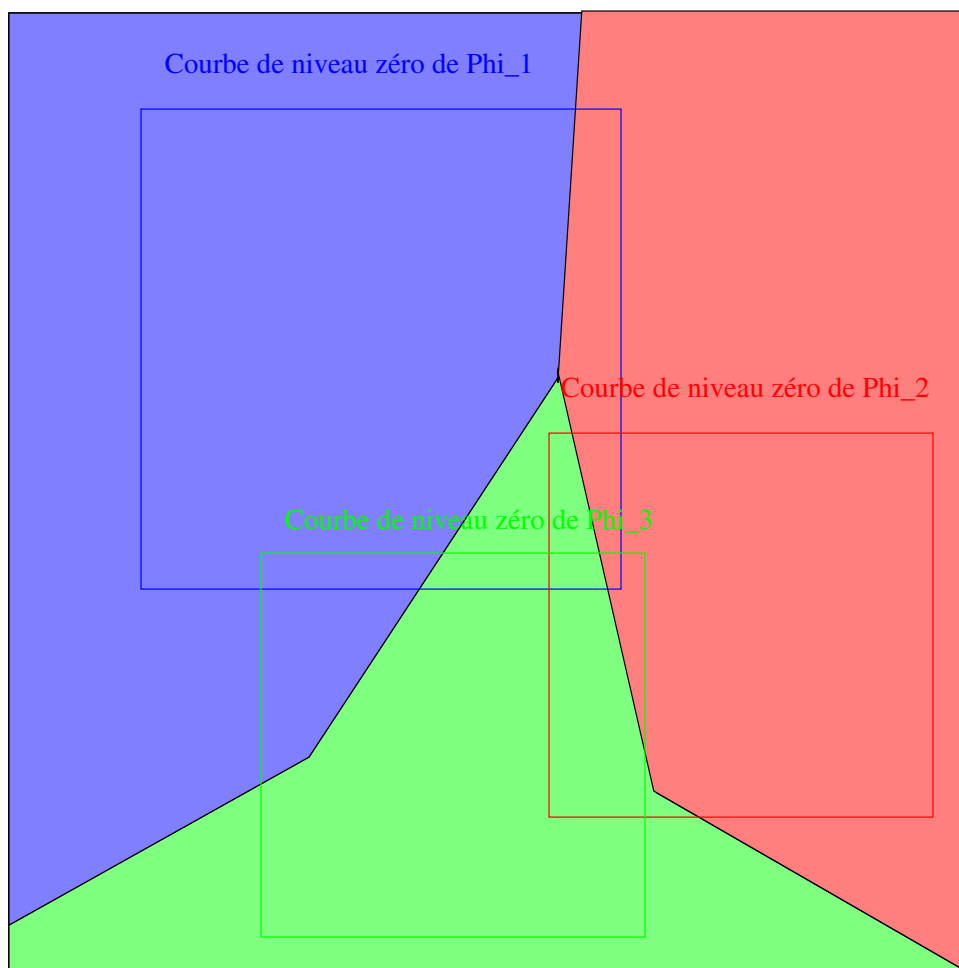


FIG. 7.8 – Initialisation manuelle

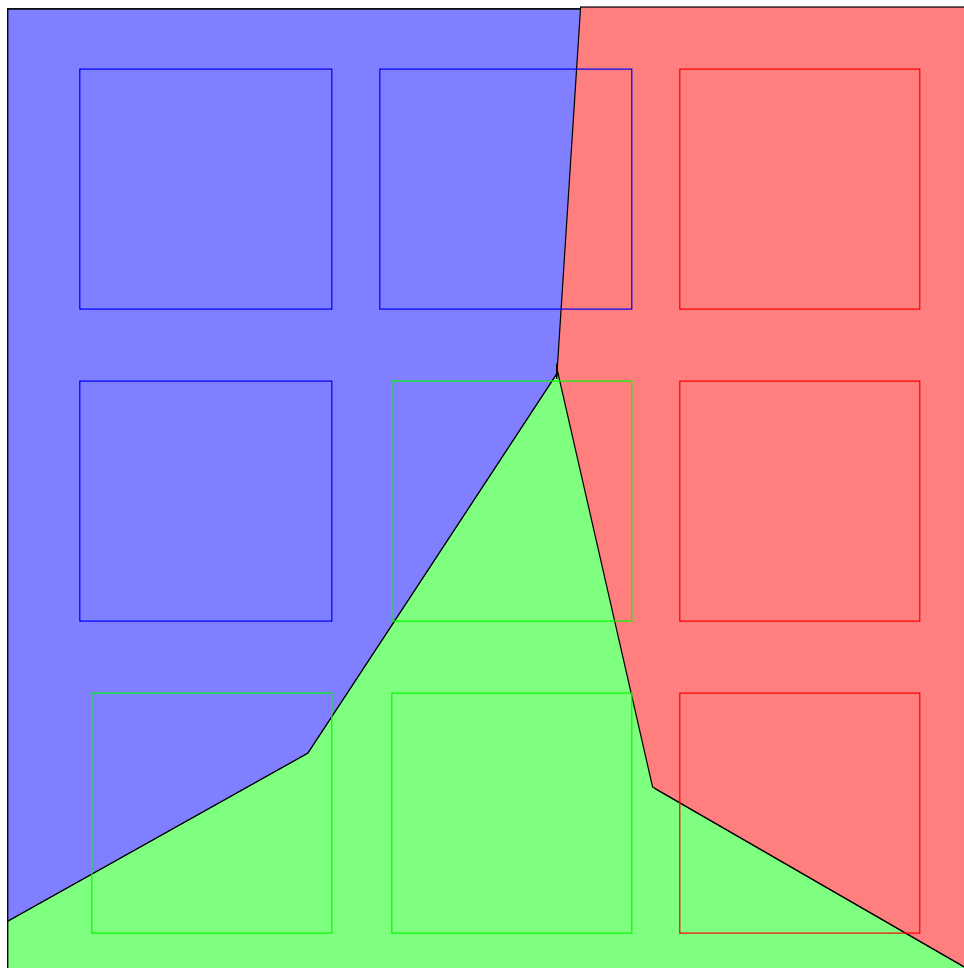


FIG. 7.9 – Initialisation par germes (“seeds”)

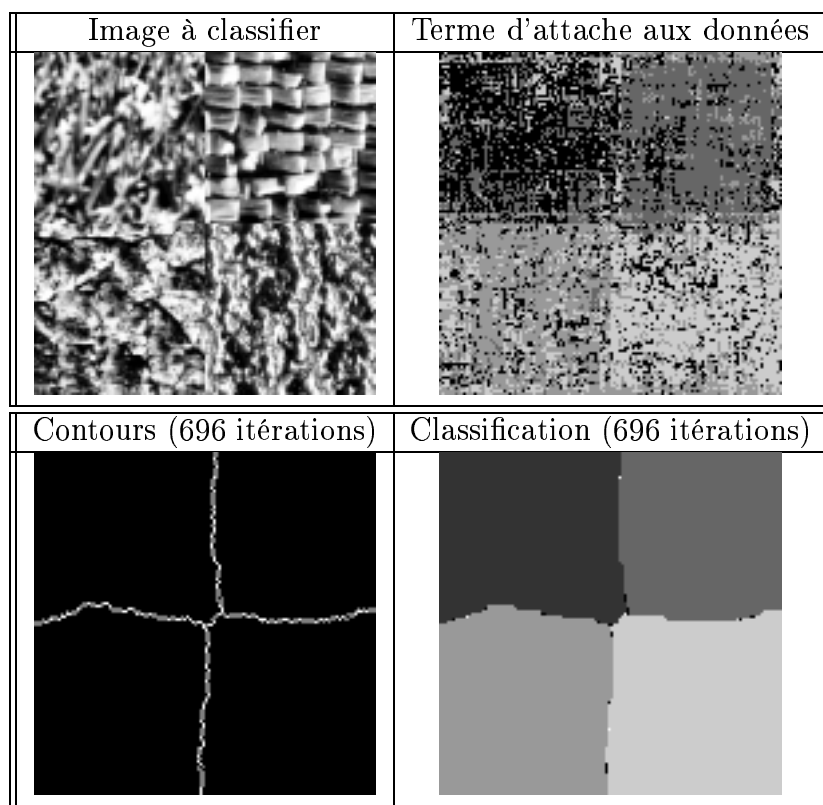


FIG. 7.10 – Classification d’une image synthétique comportant quatre textures

#### 7.4.5 Exemples :

Sur les Figures 7.10 à 7.13, on représente le terme d’attache aux données en attribuant à chaque pixel de l’image la classe pour laquelle son énergie est minimale. C’est la classification que nous obtiendrions si on utilisait uniquement le terme d’attache aux données.

##### Image synthétique avec quatre textures :

Sur cet exemple (cf Figure 7.10), on s’aperçoit bien que notre modèle est capable de traiter les jonctions triples. Par-contre, tout comme dans l’approche classique de la fonctionnelle de Mumford et Shah [139], la jonction des quatre textures donne dans l’image classifiée deux jonctions triples (à 120 degrés).

Il faut également noter que notre algorithme arrive à différencier ces quatre textures alors qu’elles sont très proches visuellement.

##### Image synthétique avec deux textures :

Cet exemple (cf Figure 7.11) illustre bien le fait que notre modèle s’adapte à n’importe quelle forme géométrique (contrairement au modèle présenté dans [163] par exemple).

##### Image synthétique avec six textures :

Cet exemple (cf Figure 7.12) montre que le modèle est capable de traiter des images texturées complexes. Ici, certaines textures sont très proches visuellement, et les formes





Image à classifier	Terme d'attache aux données
	
Contours (645 itérations)	Classification (645 itérations)
	

FIG. 7.11 – Classification d'une image synthétique comportant deux textures

géométriques des contours sont pourtant assez bien récupérées. Pour obtenir des classes plus homogènes, nous avons ici appliqué un masque gaussien au terme d'attache aux données.

#### Cas d'une image réelle contenant un zèbre :

Cet exemple (voir figure 7.13) montre encore que notre modèle s'adapte à toute les formes géométriques. Dans cet exemple, on pourrait améliorer la qualité de la classification en rajoutant dans notre fonctionnelle un terme d'arrêt sur les contours basé sur le gradient de l'image comme dans [151] (en effet, les forts gradients de l'image proviennent des contours du zèbre, le fond de l'image étant faiblement texturé). Mais comme nous voulons que notre modèle de classification de textures reste le plus général possible, nous nous en sommes abstenus.



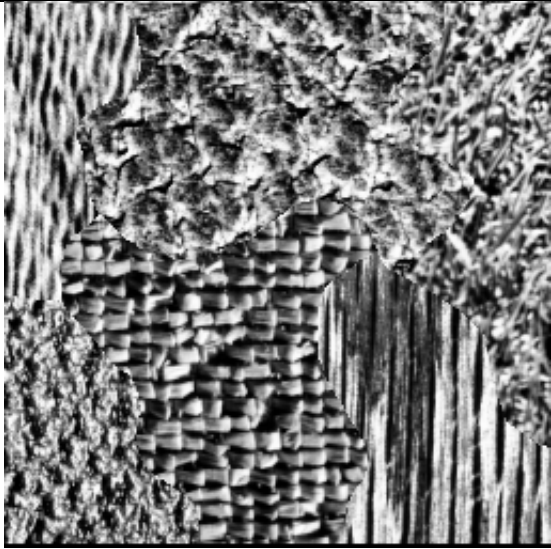
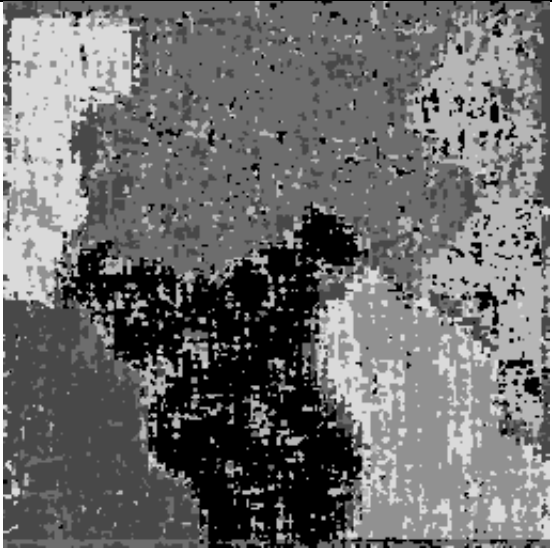
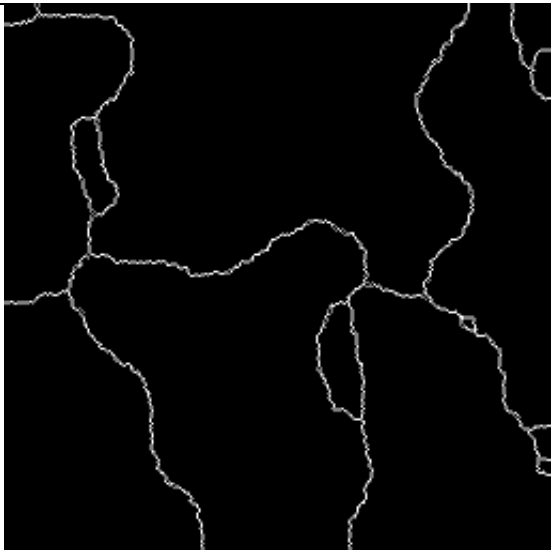

Image à classifier	Terme d'attache aux données
	
Contours (717 itérations)	Classification (717 itérations)
	

FIG. 7.12 – Classification d'une image synthétique avec 6 classes


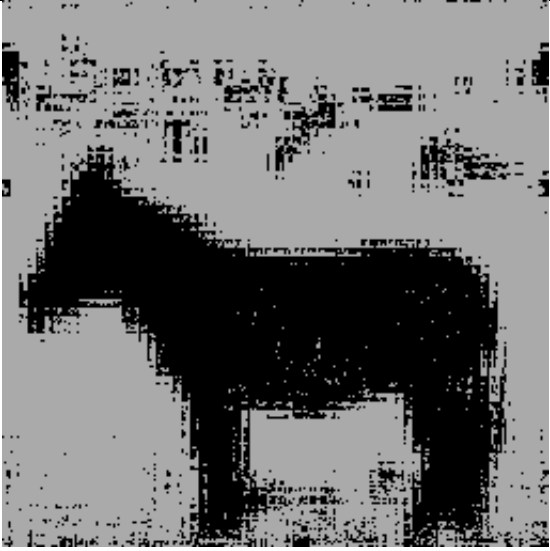
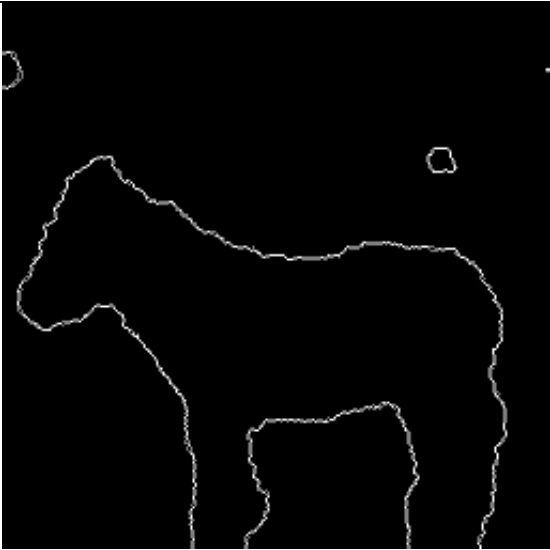
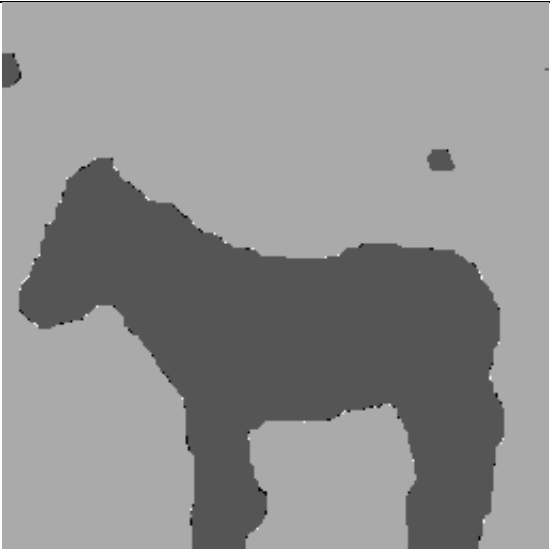
Image à classifier (© Corel)	Terme d'attache aux données
	
Contours (345 itérations)	Classification (345 itérations)
	

FIG. 7.13 – Classification d'un zèbre sur un fond

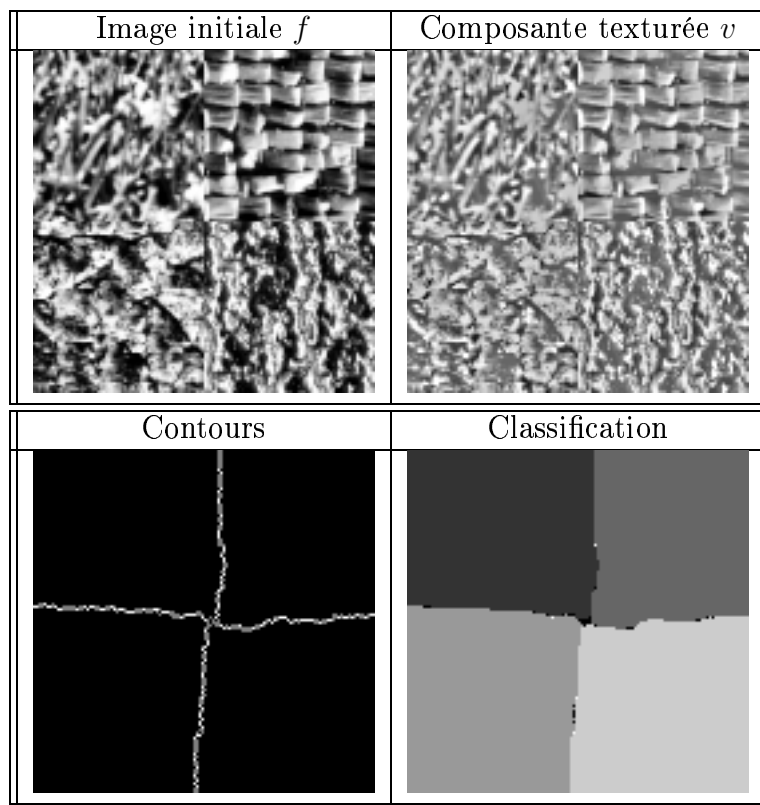


FIG. 7.14 – Exemple de classification sur une image de synthèse avec quatre textures

## 7.5 . Classification obtenue après pré-traitement avec l'algorithme $u + v$

### 7.5.1 Démarche

Dans cette section, nous montrons comment la composante  $v$  d'une image texturée  $f$  peut être utilisée pour faire de la classification sur  $f$ . En effet, d'après le Lemme 2.2.1 dans la sous-section 2.2.1, on sait que la composante  $v$  est un signal à grandes oscillations. En particulier, cette composante contient les textures de l'image initiale  $f$ . Dans le cas où  $f$  est au départ une image non bruitée,  $v$  ne contient que les textures présentes dans  $f$ .

Nous effectuons donc la classification sur la composante  $v$ .

### 7.5.2 Résultats

La classification des images est obtenue en deux temps. Nous commençons par effectuer la décomposition de l'image  $f$  en ses deux composantes  $u$  et  $v$ . Puis nous utilisons l'algorithme de classification précédent sur  $v$ .

Nous présentons des résultats sur des images synthétique dans les figures 7.14 et 7.15. Nous donnons l'image initiale  $f$ , sa composante texturée  $v$ , et le résultat de classification obtenu (d'un point de vue contours et d'un point de vue ensemble).

**Commentaires :** Les résultats de classification que nous obtenons ici sont de la même qualité que ceux de la section précédente. Dans le cas de la Figure 7.14, le pourcentage de

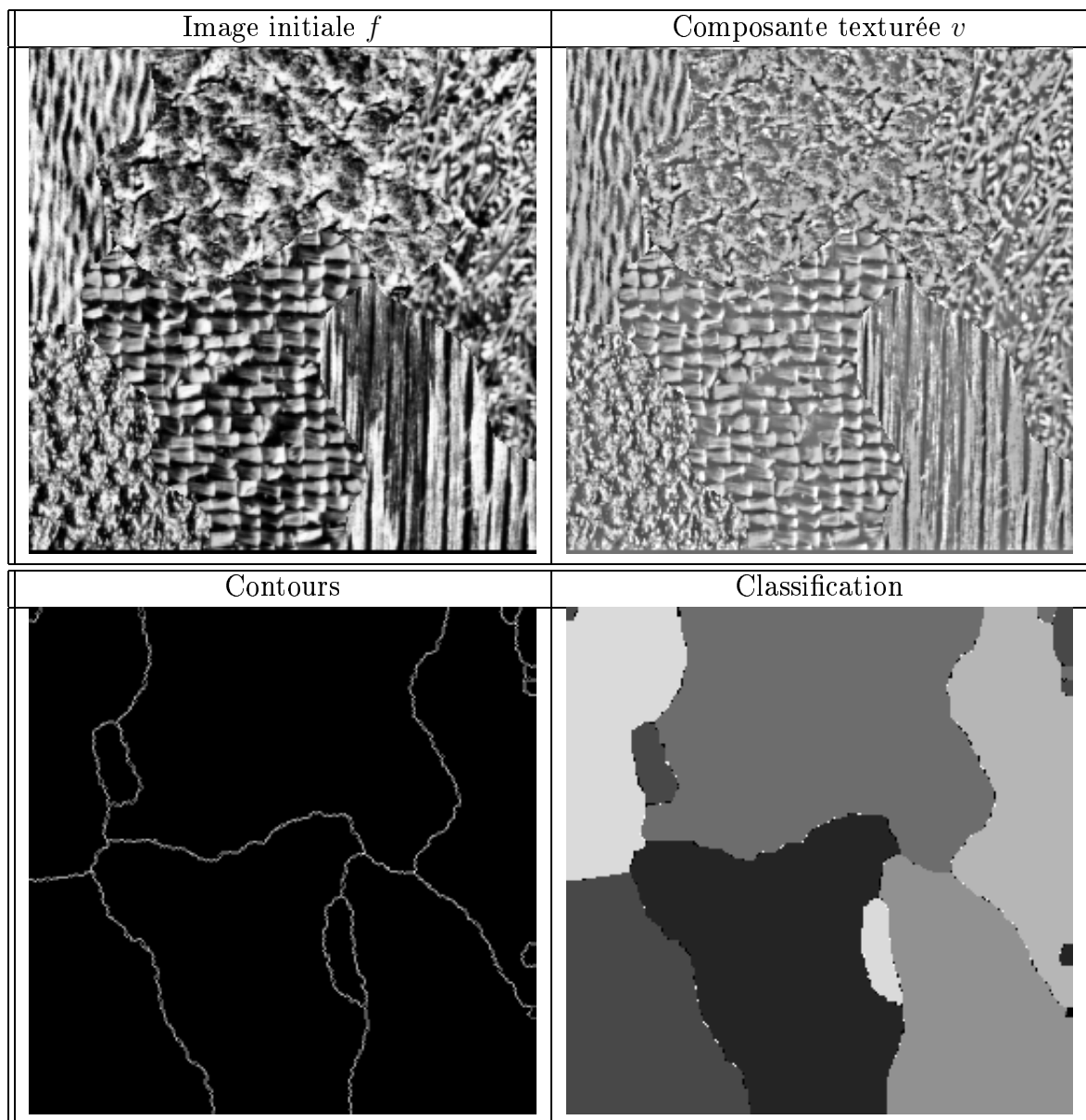


FIG. 7.15 – Exemple de classification sur une image de synthèse avec six textures

pixels mal classés est identique à celui obtenu pour la Figure 7.10 (de l'ordre de 4%). Contrairement à ce qu'on pouvait espérer, le prétraitement avec l'algorithme de décomposition  $u + v$  n'améliore pas les résultats de classification.

Cependant, comme la qualité des résultats n'est pas altérée par ce prétraitement, cela signifie que ce que l'on considère comme l'information texture au Chapitre 7 est bien présente dans la composante oscillante obtenue avec l'algorithme de décomposition  $u + v$  présenté au Chapitre 3. C'est un argument en faveur de l'utilisation de l'espace  $G$  introduit par Meyer [133] (cf Section 2.2).

## 7.6 . Perspectives

Nous avons développé un algorithme original de classification d'images pour les images texturées. C'est la version "texture" de l'algorithme de Samson et al. [151] qui effectue la classification d'images non texturées. Il faudrait maintenant étudier le cas d'une image présentant simultanément des zones texturées et des zones non texturées. Pour cela, il faudrait modifier le terme d'attache aux données de la fonctionnelle afin qu'il prenne en compte le niveau de gris moyen (il y a également un travail de normalisation des différents éléments du terme d'attache aux données).

Un autre problème intéressant est celui de l'extension de notre algorithme de classification aux images couleurs. La caractérisation des textures à travers les trois canaux RGB n'est guère aisée.

Nous n'avons pas eu le temps de rendre notre algorithme de classification non supervisée. Il faudrait pour cela rajouter une phase d'apprentissage des paramètres (en utilisant des algorithmes de fuzzy C Means par exemple [117]).

Enfin, il faut remarquer que le formalisme dans lequel nous plaçons notre algorithme de classification est très général. Nous pouvons sans peine modifier notre terme d'attaches aux données pour utiliser de nouveaux critères (plus sophistiqués) pour caractériser les textures.

# Chapitre 8

## Etude théorique de la fonctionnelle de classification

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude théorique de la fonctionnelle (7.3.15) que nous avons introduite dans le modèle de classification d'images texturées au Chapitre 7. Elle est de la forme :

$$F_\alpha(\Phi_1, \dots, \Phi_K) = \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^I H_\alpha(\Phi_i) - 1 \right)^2 + \sum_{i=1}^I \int_\Omega \delta_\alpha(\Phi_i) |\nabla \Phi_i| + \sum_{i=1}^I \int_\Omega B H_\alpha(\Phi_i) \quad (8.0.1)$$

où  $B$  est une fonction des données du problème, et où  $\delta_\alpha$  et  $H_\alpha$  sont respectivement des approximations de la mesure de Dirac et de la fonction d'Heaviside. En écrivant la fonctionnelle sous cette forme, nous pourrions appliquer les résultats de ce chapitre à la fonctionnelle (7.3.15), ainsi qu'à l'algorithme de classification d'images non texturées développé dans [151]. Afin que notre étude reste générale, nous parlerons de phases ou classes plutôt que de textures.

Pour mener à bien cette étude, nous rappelons quelques propriétés des ensembles de périmètres finis. Ensuite, dans les Sections 8.2 et 8.3, nous nous intéressons au cas particulier de deux phases. La fonctionnelle ne comporte alors plus de terme de couplage, et est ainsi plus facile à étudier. En effet, dans ce cas, nous pouvons réécrire (8.0.1) sous la forme :

$$F_\alpha(\Phi) = \int_\Omega \delta_\alpha(\Phi) |\nabla \Phi| + \int_\Omega B H_\alpha(\Phi) \quad (8.0.2)$$

et on cherche à résoudre le problème :

$$\inf_{\Phi} F_\alpha(\Phi) \quad (8.0.3)$$

L'étude de ce cas particulier permet de donner une justification théorique à de nombreux algorithmes de classification (dans le cas de deux phases) [27, 151, 144, 52, 165]. Grâce à un changement de fonction  $\Psi = H_\alpha(\Phi)$ , nous nous ramenons à une fonctionnelle convexe. Dans la Section 8.2, nous montrons que le problème limite de (8.0.3) lorsque  $\alpha = 0$  admet pour solution une fonction caractéristique. Et dans la Section 8.3, nous obtenons l'existence d'une solution  $\phi_\alpha$  Lipschitzienne pour le problème (8.0.3) (ce qui donne une justification théorique à l'approche que nous avons utilisée au Chapitre 7).

Dans la Section 8.4, nous donnons quelques résultats dans le cas où il y a au moins trois phases.

Nous avons présenté ce travail dans [20].

## 8.1 . Rappels sur les ensembles de périmètres finis

Pour toute cette section, on renvoie le lecteur à [8, 6, 89, 129, 80], notre présentation s'inspirant ici essentiellement de [8]. La définition de l'espace  $BV$  des fonctions à variation bornée a été rappelée dans la Section 2.1. En particulier, on note  $J(u) = \int_{\Omega} |Du|$ .

**Définition 8.1.1.** Soit  $E$  un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^2$ . Pour tout ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , on appelle périmètre de  $E$  dans  $\Omega$ , noté  $P(E, \Omega)$ , la variation totale de  $\mathbf{1}_E$  dans  $\Omega$ , i.e. :

$$P(E, \Omega) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} (\xi(x)) dx / \xi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^2), \|\xi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\} \quad (8.1.1)$$

On dit que  $E$  est de périmètre fini si  $P(E, \Omega) < \infty$

**Remarque :** Si  $E$  est à bord  $C^1$ , cette définition du périmètre correspond à la définition classique. On a alors :

$$P(E, \Omega) = \mathcal{H}^1(\partial E \cap \Omega) \quad (8.1.2)$$

où  $\mathcal{H}^1$  désigne la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle [8]. Le résultat reste vrai dans le cas où  $E$  est à bord Lipschitz.

Dans le cas général, si  $E$  est un ouvert à bord quelconque de  $\Omega$ , si  $\mathcal{H}^1(\partial E \cap \Omega) < +\infty$ , alors :

$$P(E, \Omega) \leq \mathcal{H}^1(\partial E \cap \Omega) \quad (8.1.3)$$

**Définition 8.1.2.** On note  $\mathcal{F}E$  la frontière réduite de  $E$ .

$$\mathcal{F}E = \left\{ x \in \operatorname{support} \left( |\mathbf{1}_E| \cap \Omega \right) / \nu_E = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{D_{\mathbf{1}_E(B_\rho(x))}}{|D_{\mathbf{1}_E(B_\rho(x))}|} \text{ existe et vérifie } |\nu_E| = 1 \right\} \quad (8.1.4)$$

**Définition 8.1.3.** Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on note  $E^t$  l'ensemble

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 / \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|E \cap B_\rho(x)|}{|B_\rho(x)|} = t \right\} \quad (8.1.5)$$

des points où  $E$  est de densité  $t$ , où  $B_\rho(x) = \{y / \|x-y\| \leq \rho\}$ . On note  $\partial^* E = \mathbb{R}^2 \setminus (E^0 \cup E^1)$  la frontière essentielle de  $E$ .

**Théorème 8.1.1.** [Federer [8]] Soit  $E$  un ensemble de périmètre fini dans  $\Omega$ . Alors :

$$\mathcal{F}E \cap \Omega \subset E^{1/2} \subset \partial^* E \quad (8.1.6)$$

et

$$\mathcal{H}^1 \left( \Omega \setminus \left( E^0 \cup \mathcal{F}E \cup E^1 \right) \right) = 0 \quad (8.1.7)$$

**Remarque :** Si  $E$  est Lipschitz, alors  $\partial E \subset \partial^* E$ . En particulier, comme on a toujours  $\mathcal{F}E \subset \partial E$  (cf [74]) :

$$P(E, \Omega) = \mathcal{H}^1(\partial E \cap \Omega) = \mathcal{H}^1(\partial^* E \cap \Omega) = \mathcal{H}^1(\mathcal{F}E \cap \Omega) \quad (8.1.8)$$

**Théorème 8.1.2.** [De Giorgi] Soit  $E$  un ensemble Lebesgue mesurable de  $\mathbb{R}^2$ . Alors  $\mathcal{F}E$  est 1-rectifiable ([8] page 160).

On rappelle que  $E$  est 1-rectifiable si et seulement si il existe des fonctions Lipschitz  $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $E \subset \bigcup_{i=0}^{+\infty} f_i(\mathbb{R})$ .

**Définition 8.1.4.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert, et  $I \subset \mathbb{N}$ .

On appelle partition de  $\Omega$  une suite  $\{E_i\}_{i \in I}$  telle que :  $E_i \subset \Omega \forall i$ ,  $E_i \cap E_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ , et  $\Omega \subset \bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i$ . On dit qu'une partition  $\{E_i\}_{i \in I}$  de  $\Omega$  est une partition de Cacciopoli si de plus  $\sum_{i \in I} P(E_i, \Omega) < \infty$

## 8.2 . Problème à deux phases

On considère  $\Omega$  un ouvert borné Lipschitz de  $\mathbb{R}^2$ . On construit une fonctionnelle comprenant deux termes : un terme de pénalisation de la longueur, et un terme d'attache aux données. On note  $E$  un ensemble de  $\Omega$  tel que  $E$  et  $\Omega \setminus E$  correspondent aux deux phases. On appelle fonctionnelle de partition, la fonctionnelle :

$$G(E) = \int_{\Omega} |D\mathbf{1}_E| + \int_{\Omega} B\mathbf{1}_E \quad (8.2.1)$$

On suppose que  $B \in L^\infty(\Omega)$ . On considère les trois problèmes suivants :

1.

$$\inf_{\phi \in Lip(\Omega)} \left( \int_{\phi=0} ds + \int_{\Omega} BH(\phi) \right) \quad (8.2.2)$$

2.

$$\inf_{E \in \mathcal{B}(\Omega)} \left( P(E, \Omega) + \int_E B \right) \quad (8.2.3)$$

3.

$$\inf_{\psi \in BV(\Omega), 0 \leq \psi \leq 1} \left( \int_{\Omega} |D\psi| + \int_{\Omega} B\psi \right) \quad (8.2.4)$$

où  $\mathcal{B}(\Omega)$  désigne l'ensemble des Boréliens de  $\Omega$ , et où  $H$  désigne la fonction d'Heaviside.

**Remarque :** La fonctionnelle (8.0.2) constitue une version approchée de (8.2.2), dans le sens où pour toute fonction Lipschitzienne  $\phi$ , on a (avec (8.3.8)) :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} F_\alpha(\phi) = \int_{\phi=0} ds + \int_{\Omega} BH(\phi) \quad (8.2.5)$$

Dans la suite, nous allons montrer que ces trois problèmes sont très proches. Le problème (8.2.3) correspond au problème de classification à deux phases que nous avons introduit avec (8.2.1). Il s'agit en fait d'un problème classique dans la théorie des surfaces minimales [6, 128, 129], celui des surfaces à courbure moyenne donnée. La théorie des ensembles de périmètres finis a déjà été utilisée plusieurs fois en traitement d'images [7, 64, 130, 138].



### 8.2.1 Etude du problème (8.2.3)

Le problème (8.2.3) a été complètement étudié par Massari dans [128]. On reprend ici la démarche de [6]. On introduit le problème :

$$\inf_{E \subset \Omega, E \text{ à bord } C^{1,1}} \left( \mathcal{H}^1(\partial E) + \int_E B \right) \quad (8.2.6)$$

En fait, comme le montrent les trois résultats suivants démontrés dans [6], les problèmes (8.2.3) et (8.2.6) sont équivalents.

**Proposition 8.2.1.** *Le problème (8.2.3) admet au moins une solution. De plus l'infimum de (8.2.6) coïncide avec le minimum de (8.2.3).*

**Théorème 8.2.1.** *Soit  $E$  une solution de (8.2.3). Alors  $\mathcal{F}E = \partial^* E$  (car  $n = 2 < 8$ ) et  $\mathcal{F}E$  est de classe  $C^{1,1}$ .*

**Corollaire 8.2.1.** *Les problèmes (8.2.6) et (8.2.3) admettent les mêmes solutions. En particulier, le problème (8.2.6) admet au moins une solution.*

Pour la démonstration du théorème (8.2.1), nous renvoyons le lecteur à [6, 129]. Nous nous contentons ici de donner les principaux arguments de la démonstration de la Proposition 8.2.1.

**Preuve de la Proposition 8.2.1 :** Comme  $\Omega$  est borné et Lipschitz, si on considère  $E = \Omega$ , on voit que l'infimum dans (8.2.3) est fini. Considérons une suite minimisante  $(E_n)$  pour le problème (8.2.3). En particulier, la suite  $P(E_n, \Omega)$  est bornée. Donc, d'après le théorème 3.39 page 145 de [8], il existe  $E \in \mathcal{B}(\Omega)$  tel que  $E_n \rightarrow E$  (au sens  $\mathbf{1}_{E_n} \rightarrow \mathbf{1}_E$  dans  $L^1(\Omega)$ ). De plus, d'après la proposition 3.38 p 144 de [8], l'application  $F \mapsto P(F, \Omega)$  est sci (conséquence du caractère sci de la variation totale). Donc :

$$P(E, \Omega) \leq \liminf P(E_n, \Omega) \quad (8.2.7)$$

De plus, comme  $\mathbf{1}_{E_n} \rightarrow \mathbf{1}_E$  dans  $L^1(\Omega)$ , on a en particulier :

$$\int_{\Omega} \mathbf{1}_{E_n} B \rightarrow \int_{\Omega} \mathbf{1}_E B \quad (8.2.8)$$

ce qui conclut la preuve. ■

Grâce a ces résultats, on sait que le problème (8.2.3) possède au moins une solution  $\tilde{E}$ , et en plus que  $\tilde{E}$  est à bord  $C^{1,1}$ . En particulier, on a :  $P(\tilde{E}, \Omega) = \mathcal{H}^1(\partial \tilde{E} \cap \Omega)$  (cf 8.1.8).

### 8.2.2 Etude du problème (8.2.4)

**Proposition 8.2.2.** *Il existe  $\tilde{E} \in \mathcal{B}(\Omega)$  solution de (8.2.3) tel que  $\mathbf{1}_{\tilde{E}}$  soit solution de (8.2.4).*

**Preuve :** On considère la fonctionnelle suivante définie sur  $\{\psi \in BV(\Omega), 0 \leq \psi \leq 1\}$  :

$$G(\psi) = \int_{\Omega} B\psi + \int_{\Omega} |D\psi| \quad (8.2.9)$$

$G$  est convexe et s.c.i. sur  $BV - *$ . La condition  $0 \leq \psi \leq 1$  nous permet de conclure quant à l'existence d'une solution  $\tilde{\psi}$  pour (8.2.4).

Rappelons la formule de la co-aire [8] :

$$\int_{\Omega} |D\psi| = \int_{-\infty}^{+\infty} |D\mathbf{1}_{\{\psi \geq s\}}| ds = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\{\psi \geq s\}, \Omega) ds \quad (8.2.10)$$

Comme nous imposons la condition  $0 \leq \psi \leq 1$ , (8.2.10) se réécrit ici :

$$\int_{\Omega} |D\psi| = \int_0^1 |D\mathbf{1}_{\{\psi \geq s\}}| ds = \int_0^1 P(\{\psi \geq s\}, \Omega) ds \quad (8.2.11)$$

Regardons maintenant le deuxième terme de la fonctionnelle. Commençons par remarquer que, comme  $0 \leq \psi \leq 1$  :

$$\psi(x) = \int_0^{\psi(x)} ds = \int_0^1 \mathbf{1}_{\{\psi(x) \geq s\}} ds \quad (8.2.12)$$

et donc :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} B\psi &= \int_{\Omega} B(x) \left( \int_0^1 \mathbf{1}_{\{\psi(x) \geq s\}} ds \right) dx \\ (\text{Fubini}) &= \int_0^1 \int_{\Omega} B(x) \mathbf{1}_{\{\psi(x) \geq s\}} dx ds \\ &= \int_0^1 \int_{\{\psi \geq s\}} B(x) dx ds \end{aligned}$$

D'où :

$$G(\psi) = \int_{\Omega} (|D\psi| + B\psi) = \int_0^1 \left( P(\{\psi \geq s\}, \Omega) + \int_{\{\psi \geq s\}} B \right) ds \quad (8.2.13)$$

ce qui entraîne :

$$\inf_{\psi \in BV(\Omega), 0 \leq \psi \leq 1} \int_{\Omega} (|D\psi| + B\psi) = \inf_{\psi \in BV(\Omega), 0 \leq \psi \leq 1} \int_0^1 \left( P(\{\psi \geq s\}, \Omega) + \int_{\{\psi \geq s\}} B \right) ds \quad (8.2.14)$$

Soit  $\tilde{E}$  une solution du problème (8.2.3). Notons  $\tilde{\psi} = \mathbf{1}_{\tilde{E}}$ . Montrons que  $\tilde{\psi}$  est solution de (8.2.2). Soit  $s \in ]0, 1[$ .

- Soit  $x \in \tilde{E}$ . Alors  $\tilde{\psi}(x) = \mathbf{1}_{\tilde{E}}(x) = 1$ . Donc  $\tilde{\psi}(x) \geq s$ . D'où  $\tilde{E} \subset \{\tilde{\psi} \geq s\}$ .
- Soit  $x \in \{\tilde{\psi} \geq s\}$ . Alors  $\tilde{\psi}(x) \geq s > 0$ . Donc  $\tilde{\psi}(x) = 1$  (car  $\tilde{\psi} = 0$  ou  $1$ ). D'où  $\{\tilde{\psi} \geq s\} \subset \tilde{E}$ .

On en déduit finalement que,  $\forall s \in ]0, 1[$  :

$$\tilde{E} = \{\tilde{\psi} \geq s\} \quad (8.2.15)$$

Considérons maintenant  $\bar{\psi} \in BV(\Omega)$  telle que  $0 \leq \bar{\psi} \leq 1$ . On a (en utilisant (8.2.13)) :

$$\begin{aligned} G(\bar{\psi}) &= \int_{\Omega} (|D\bar{\psi}| + B\bar{\psi}) \\ &= \int_0^1 \left( P(\{\bar{\psi} \geq s\}, \Omega) + \int_{\{\bar{\psi} \geq s\}} B \right) ds \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} G(\tilde{\psi}) &= \int_0^1 \left( P(\{\tilde{\psi} \geq s\}, \Omega) + \int_{\{\tilde{\psi} \geq s\}} B \right) ds \\ &= \int_0^1 \left( P(\tilde{E}, \Omega) + \int_{\tilde{E}} B \right) ds \\ &= P(\tilde{E}, \Omega) + \int_{\tilde{E}} B \end{aligned}$$

Or, comme  $\tilde{E}$  est une solution du problème (8.2.3), on a :

$$P(\tilde{E}, \Omega) + \int_{\tilde{E}} B \leq P(\{\bar{\psi} \geq s\}, \Omega) + \int_{\{\bar{\psi} \geq s\}} B \quad (8.2.16)$$

Et en intégrant (8.2.16) par rapport à  $s$ , on obtient :

$$\underbrace{P(\tilde{E}, \Omega) + \int_{\tilde{E}} B}_{=G(\tilde{\psi})} \leq \underbrace{\int_0^1 \left( P(\{\bar{\psi} \geq s\}, \Omega) + \int_{\{\bar{\psi} \geq s\}} B \right) ds}_{=G(\bar{\psi})} \quad (8.2.17)$$

Et donc  $\tilde{\psi}$  est bien solution du problème (8.2.4). ■

On a donc montré que le problème (8.2.4) possède au moins une solution qui est une fonction caractéristique.

### 8.2.3 Etude du problème (8.2.2)

**Proposition 8.2.3.** *Soit  $E$  une solution du problème (8.2.3). Soit  $\phi$  la fonction distance signée euclidienne à  $\partial E$  ( $\phi$  positive dans  $\Omega \setminus E$  et négative dans  $E$ ). Alors  $\phi$  est solution du problème (8.2.2).*

Pour démontrer la Proposition (8.2.3), on aura besoin de deux lemmes :

**Lemme 8.2.1.** *Soit  $\phi$  Lipschitz. On pose  $\psi = H(\phi)$ . Alors :*

$$\int_{\{\phi=0\}} ds \geq \int_{\Omega} |D\psi| \quad (8.2.18)$$

**Preuve :** D'après la formule de la co-aire [8], on a :

$$\int_{\Omega} |D\psi| = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\{\psi \geq s\}, \Omega) ds = \int_0^1 P(\{\psi \geq s\}, \Omega) ds \quad (8.2.19)$$

car  $0 \leq \psi \leq 1$ . Donc

$$\int_{\Omega} |D\psi| = \int_0^1 P(\{H(\phi) \geq s\}, \Omega) ds \quad (8.2.20)$$

On pose  $E = \{\phi > 0\}$  ( $E$  est ouvert car  $\phi$  continue). On a donc  $E = \{H(\phi) > s\} \forall s > 0$ .  
On a :

$$\int_0^1 P(\{H(\phi) \geq s\}, \Omega) ds = \int_0^1 P(E, \Omega) ds = P(E, \Omega) \quad (8.2.21)$$

D'où

$$\int_{\Omega} |D\psi| = P(E, \Omega) \quad (8.2.22)$$

On conclut alors en remarquant que :

$$P(E, \Omega) \leq \mathcal{H}^1(\partial E \cap \Omega) \leq \int_{\{\phi=0\}} ds \quad (8.2.23)$$

■

**Lemme 8.2.2.** Soit  $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ . La distance Euclidienne signée  $u$  à  $A$  est 1-Lipschitzienne.

**Preuve :** Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $\Omega$ . On note  $d(x, y)$  la distance Euclidienne entre  $x$  et  $y$ .

- **Premier cas :**  $u(x) \geq u(y) \geq 0$

Soit  $\epsilon > 0$ . Il existe  $a_{\epsilon} \in A$  tel que :

$$d(x, a_{\epsilon}) \geq d(x, A) \geq d(x, a_{\epsilon}) - \epsilon \quad (8.2.24)$$

Or, on a :

$$d(y, A) \leq d(y, a_{\epsilon}) \leq d(y, x) + d(x, a_{\epsilon}) \leq d(y, x) + d(x, A) + \epsilon \quad (8.2.25)$$

Donc  $u(y) - u(x) \leq d(y, x) - \epsilon$ . Comme ceci est vrai  $\forall \epsilon > 0$ , on en déduit que :

$$u(y) - u(x) \leq d(y, x) \quad (8.2.26)$$

Et comme  $x$  et  $y$  jouent des rôles symétriques, on conclut que :

$$|u(x) - u(y)| \leq d(x, y) \quad (8.2.27)$$

- **Deuxième cas :**  $0 \geq u(x) \geq u(y)$

La démarche est identique à celle du premier cas.

- **Troisième cas :**  $u(x) \geq 0 \geq u(y)$

Considérons le segment  $[x, y]$ .  $\exists a \in [x, y]$  tel que  $u(a) = 0$

Or

$$d(x, y) = \|x - y\| = \underbrace{\|x - a\|}_{\geq u(x)} + \underbrace{\|y - a\|}_{\geq -u(y)}$$

Donc

$$d(x, y) \geq |u(x) - u(y)|$$

■

**Preuve de la Proposition 8.2.3 :** D'après le Lemme 8.2.2, on sait que  $\phi$  est 1-Lipschitz. Soit  $\tilde{\phi} \in Lip(\Omega)$ . On note  $\tilde{E} = \{\tilde{\phi} > 0\}$ . D'après la preuve du Lemme 8.2.1, on a :

$$\int_{\tilde{\phi}=0} ds \geq P(\tilde{E}, \Omega) \quad (8.2.28)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\phi}=0} ds + \int_{\Omega} BH(\tilde{\phi}) &\geq P(\tilde{E}, \Omega) + \int_{\Omega} B\mathbf{1}_{\tilde{E}} \\ &\geq P(E, \Omega) + \int_{\Omega} B\mathbf{1}_E \end{aligned}$$

car  $E$  est solution de (8.2.3). D'où :

$$\int_{\tilde{\phi}=0} ds + \int_{\Omega} BH(\tilde{\phi}) \geq P(E, \Omega) + \int_{\Omega} BH(\phi) \quad (8.2.29)$$

Or  $E$  étant solution de (8.2.3), on sait d'après la Proposition 8.2.1 que  $E$  est à bord  $C^{1,1}$ , et on a donc :

$$P(E, \Omega) = \mathcal{H}^1(\partial E \cap \Omega) = \int_{\phi=0} ds \quad (8.2.30)$$

On conclut ainsi que :

$$\int_{\tilde{\phi}=0} ds + \int_{\Omega} BH(\tilde{\phi}) \geq \int_{\phi=0} ds + \int_{\Omega} BH(\phi) \quad (8.2.31)$$

ce qui montre bien que  $\phi$  est solution du problème (8.2.2). ■

Remarque : dans la démonstration de la Proposition 8.2.3, on a montré :

**Lemme 8.2.3.** *Soit  $E$  un ouvert à bord  $C^1$ , et soit  $\phi$  la fonction distance signée à  $\partial E$ . Alors :*

$$\int_{\phi=0} ds = P(E, \Omega) \quad (8.2.32)$$

On a donc montré que le problème (8.2.2) admet au moins une solution.

## 8.2.4 Equivalence entre les problèmes (8.2.2), (8.2.3) et (8.2.4)

**Proposition 8.2.4.** *Soit  $\phi$  une solution du problème (8.2.2). Alors  $\psi = H(\phi)$  est solution du problème (8.2.4).*

**Preuve :** D'après le Lemme 8.2.1, on a :

$$\int_{\{\phi=0\}} ds \geq \int_{\Omega} |D\psi| \quad (8.2.33)$$

Donc

$$\int_{\phi=0} ds + \int_{\Omega} BH(\phi) \geq \int_{\Omega} |D\psi| + \int_{\Omega} B\psi \quad (8.2.34)$$

$$\geq \int_{\Omega} |D\tilde{\psi}| + \int_{\Omega} B\tilde{\psi} \quad (8.2.35)$$

où  $\tilde{E}$  est solution du problème (8.2.3), et  $\tilde{\psi} = \mathbf{1}_{\tilde{E}}$  (avec la Proposition 8.2.2, on sait que  $\tilde{\psi}$  est solution du problème (8.2.4)). On note  $\tilde{\phi}$  la fonction distance signée à  $\partial\tilde{E}$ . D'après la Proposition 8.2.3,  $\tilde{\phi}$  est solution du problème (8.2.2), et on a donc :

$$\int_{\{\phi=0\}} ds + \int_{\Omega} BH(\phi) = \int_{\{\tilde{\phi}=0\}} ds + \int_{\Omega} BH(\tilde{\phi}) \quad (8.2.36)$$

Or avec le Lemme 8.2.3, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\phi=0} ds + \int_{\Omega} BH(\phi) &= P(\tilde{E}, \Omega) + \int_{\Omega} B\mathbf{1}_{\tilde{E}} \\ &= \int_{\tilde{\phi}=0} ds + \int_{\Omega} BH(\tilde{\phi}) \end{aligned}$$

On en déduit que (8.2.34) et (8.2.35) sont des égalités, et par conséquent que  $\psi$  est solution du problème (8.2.4). ■

**Remarque :** En particulier, on vient de montrer que :

$$\inf_{\phi \in Lip(\Omega)} \left( \int_{\phi=0} ds + \int_{\Omega} BH(\phi) \right) = \inf_{\psi \in BV(\Omega), 0 \leq \psi \leq 1} \left( \int_{\Omega} |D\psi| + \int_{\Omega} B\psi \right) \quad (8.2.37)$$

On a également montré le résultat suivant :

**Lemme 8.2.4.** *Soit  $\phi$  solution du problème (8.2.2), et soit  $\psi = H(\phi)$ . Alors :*

$$\int_{\phi=0} ds = \int_{\Omega} |D\psi| \quad (8.2.38)$$

Nous avons finalement montré une sorte d'équivalence entre les problèmes (8.2.2), (8.2.3) et (8.2.4), équivalence que nous résumons dans le théorème suivant :

**Théorème 8.2.2.**

1. Si  $\phi$  solution du problème (8.2.2), alors  $E = \{\phi > 0\}$  est solution du problème (8.2.3), et  $\psi = H(\phi)$  est solution du problème (8.2.4).
2. Si  $E$  est solution du problème (8.2.3), alors  $\psi = \mathbf{1}_E$  est solution du problème (8.2.4), et  $\phi$  la fonction distance signée à  $\partial E$  est solution du problème (8.2.2).
3. Si  $\psi$  est solution du problème (8.2.4), et si on peut écrire  $\psi = \mathbf{1}_E$ , alors  $E$  est solution du problème (8.2.3), et  $\phi$  la fonction distance signée à  $\partial E$  est solution du problème (8.2.2).

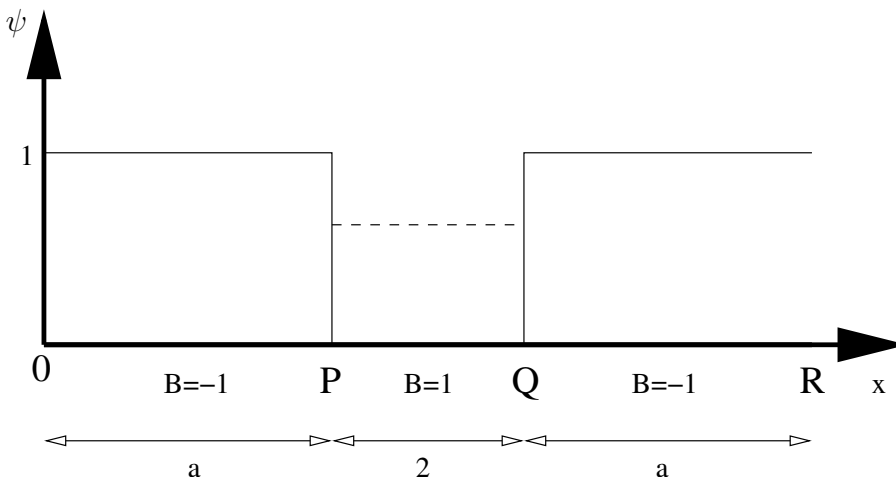


FIG. 8.1 – Exemple où le problème (8.2.4) admet des solutions qui ne sont pas des fonctions caractéristiques

**Preuve :** C'est une conséquence des Propositions 8.2.1, 8.2.2 et 8.2.4, et du Corollaire 8.2.1. ■

Pour avoir une équivalence complète entre les problèmes (8.2.2), (8.2.3) et (8.2.4), il faudrait que toutes les solutions de (8.2.4) soient des fonctions caractéristiques, i.e. qu'elles puissent s'écrire  $\psi = \mathbf{1}_E$ . Ce résultat n'est malheureusement pas vrai en général.

En effet, il est immédiat de vérifier que si  $B$  est à moyenne nulle, alors toute fonction constante (comprise entre 0 et 1) est solution du problème (8.2.4).

En fait, même lorsque  $\int_{\Omega} B \neq 0$ , le problème (8.2.4) peut admettre des solutions qui ne soient pas des fonctions caractéristiques, comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple :** On donne ici un exemple en dimension 1, d'un ouvert  $\Omega$  et d'une fonction  $B$  tels que le problème (8.2.4) admette des solutions autres que des fonctions caractéristiques. On rappelle que la fonctionnelle que l'on cherche à minimiser dans le problème (8.2.4) s'écrit :

$$F(\psi) = \int_{\Omega} B\psi + \int_{\Omega} |D\psi| \quad (8.2.39)$$

On considère le cas de la Figure 8.1. On choisit  $B = -1$  sur les segments  $[O, P]$  et  $[Q, R]$ , qui sont tous les deux de longueur  $a > 1$ . Et on choisit  $B = 1$  sur le segment  $[P, Q]$  qui est lui de longueur égale à 2. D'après la Proposition 8.2.2, on sait que l'infimum dans (8.2.4) est un minimum, et qu'il est atteint au moins pour une fonction caractéristique. Si  $\psi$  est une fonction caractéristique, alors

$$F(\psi) = nb + \int_{\Omega} B\psi \quad (8.2.40)$$

où  $nb$  désigne le nombre de sauts de  $\psi$  sur  $\Omega$ .

Considérons quelques fonctions caractéristiques particulières :

$$\psi_0 = \begin{cases} 1 & \text{sur } \{B = -1\} \\ 0 & \text{sur } \{B = 1\} \end{cases} \quad (8.2.41)$$

ainsi que  $\psi_1 = 1$  sur tout  $\Omega$ , et  $\psi_2 = 0$  sur tout  $\Omega$ . On a  $F(\psi_2) = 0$ , et  $F(\psi_0) = 2 - 2a = F(\psi_1)$ . Comme on a pris  $a > 1$ , on a aussi  $F(\psi_0) < F(\psi_2)$ .

Si  $\psi$  est une fonction caractéristique, alors  $\int_{\Omega} B\psi \geq -2a$ . Donc  $F(\psi) \geq nb - 2a$ . Or  $F(\psi_0) = 2 - 2a$ ; donc si  $\psi$  est une fonction caractéristique solution de (8.2.4), alors nécessairement on a :  $nb \leq 2$ . Il est ensuite aisé de vérifier que  $\psi_0$  et  $\psi_1$  réalisent en fait le minimum de (8.2.4), et la valeur de ce minimum est donc de  $2 - 2a$ .

Considérons maintenant la famille de fonctions définies pour  $0 \leq \alpha \leq 1$  :

$$\psi_{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{sur } \{B = -1\} \\ \alpha & \text{sur } \{B = 1\} \end{cases} \quad (8.2.42)$$

On a  $F(\psi_{\alpha}) = 2(1 - \alpha) - 2a + 2\alpha = 2 - 2a = F(\psi_0)$ . Donc  $\psi_{\alpha}$  est solution du problème (8.2.4)  $\forall \alpha \in [0, 1]$ . Et si  $0 < \alpha < 1$ , alors  $\psi_{\alpha}$  n'est pas une fonction caractéristique. ■

## 8.3 . Les problèmes approchés

Nous nous intéressons ici au modèle numérique utilisé au Chapitre 7, ainsi qu'à son lien avec le modèle théorique de la Section 8.2. Pour l'étude du modèle numérique, il faut non seulement obtenir des résultats d'existence de solutions, mais surtout avoir des renseignements sur la régularité de ces solutions. En effet, dans la méthode numérique utilisée au Chapitre 7, nous supposons l'existence de solutions continues. Pour cela, nous allons commencer par régulariser notre problème. Nous utiliserons ensuite un passage à la limite pour revenir à notre problème initial, l'argument essentiel étant ici un théorème de perturbation dû à R. Temam [159, 78].

A  $\alpha$  fixé, nous allons montrer l'existence d'une solution continue pour le problème (8.0.2) (ce qui justifiera l'approche numérique du Chapitre 7).

### 8.3.1 Approximations régulières de $H$ et $\delta$

Nous utiliserons les approximations régulières suivantes de la fonction d'Heaviside  $H$  et de la mesure de Dirac  $\delta$  (ce ne sont pas tout à fait les approximations classiques (7.3.1) et (7.3.2)) On suppose  $0 \leq \alpha \leq 1$  (cf Figures 8.2 et 8.3).

$$\delta_{\alpha}(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} (1 + \cos \frac{\pi s}{\alpha}) & \text{si } |s| \leq \tilde{s} \\ \alpha & \text{si } |s| \geq \tilde{s} \end{cases} \quad (8.3.1)$$

$$H_{\alpha}(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{s}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi s}{\alpha} \right) & \text{si } |s| \leq \tilde{s} \\ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\tilde{s}}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi \tilde{s}}{\alpha} \right) + \alpha(s - \tilde{s}) & \text{si } s > \tilde{s} \\ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{-\tilde{s}}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \sin \frac{-\pi \tilde{s}}{\alpha} \right) + \alpha(s + \tilde{s}) & \text{si } s < -\tilde{s} \end{cases} \quad (8.3.2)$$

où :

$$\tilde{s} = \frac{2\alpha}{\pi} \arccos(\alpha) \quad (8.3.3)$$

Avec cette définition de  $\tilde{s}$ , on a (lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ ) :

$$0 \leq \tilde{s} \leq \alpha \text{ et } \tilde{s} \sim \alpha \quad (8.3.4)$$

De plus,  $\delta_{\alpha}(\tilde{s}) = \delta_{\alpha}(-\tilde{s}) = \alpha$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{\alpha}(\tilde{s}) = 1$ , et  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{\alpha}(-\tilde{s}) = 0$ .



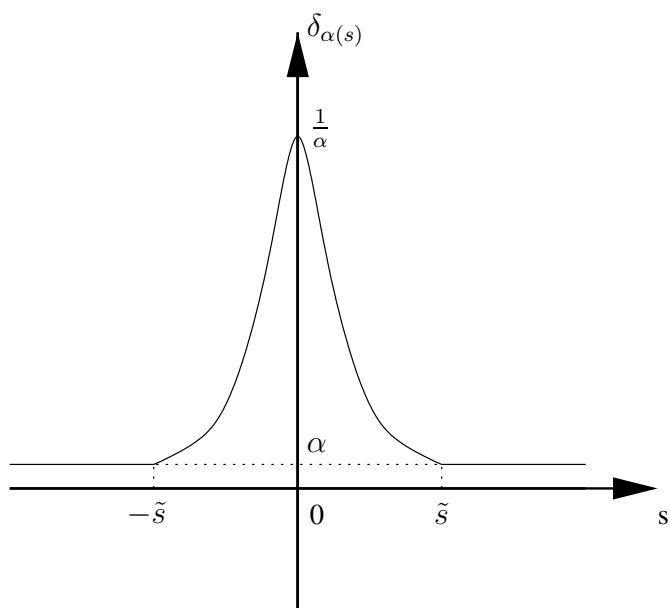


FIG. 8.2 – Approximation  $\delta_\alpha$  de la distribution de Dirac  $\delta$

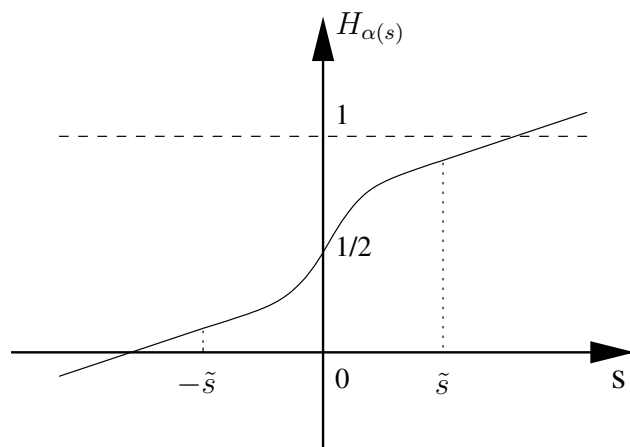


FIG. 8.3 – Approximation  $H_\alpha$  de la distribution de Heaviside  $H$

Comme  $\Omega$  borné, on a lorsque  $\alpha \rightarrow 0 : \delta_\alpha \rightarrow \delta$  et  $H_\alpha \rightarrow H$  (au sens des distributions).

**Lemme 8.3.1.**  $H_\alpha$  est un  $C^1$  difféomorphisme croissant de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . De plus,  $\psi_\alpha = H_\alpha(\phi)$  est Lipschitz si et seulement si la fonction  $\phi$  est Lipschitz.

**Preuve :** On a  $H'_\alpha = \delta_\alpha$ , donc :

$$\alpha \leq H'_\alpha \leq \frac{1}{\alpha} \quad (8.3.5)$$

Et  $(H_\alpha^{-1}(y))' = \frac{1}{H'_\alpha(H_\alpha(y))} = \frac{1}{\delta_\alpha(H_\alpha(y))}$ . Donc :

$$\alpha \leq (H_\alpha^{-1})' \leq \frac{1}{\alpha} \quad (8.3.6)$$

■

**Remarque :** On rappelle que le problème que l'on cherche à résoudre numériquement au Chapitre 7 dans le cas de deux phases (i.e. deux textures) est le suivant :

$$\inf_{\phi \in Lip(\Omega)} \left( \int_{\Omega} \delta_\alpha(\phi) |D\phi| + \int_{\Omega} BH_\alpha(\phi) \right) \quad (8.3.7)$$

On peut montrer (voir [17]) :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{\Omega} \delta_\alpha(\phi) |D\phi| \right\} = \int_{\phi=0} ds \quad (8.3.8)$$

On en déduit aisément que (8.2.2) est le problème limite de (8.3.7) lorsque  $\alpha \rightarrow 0^+$ .

Il nous reste à voir maintenant si le problème (8.3.7) admet une solution lorsque  $\alpha > 0$ .

Il existe un lien très simple entre (8.3.7) et le problème (8.2.4) que nous rappelons ici :

$$\inf_{\psi \in BV(\Omega), 0 \leq \psi \leq 1} \left( \int_{\Omega} |D\psi| + \int_{\Omega} B\psi \right) \quad (8.3.9)$$

En effet, si on pose :

$$\psi_\alpha = H_\alpha(\phi) \quad (8.3.10)$$

Cela implique  $D\psi_\alpha = \delta_\alpha(\phi) D\phi$ . On a alors pour tout  $\alpha > 0$  :

$$\int_{\Omega} BH_\alpha(\phi) + \int_{\Omega} \delta_\alpha(\phi) |D\phi| = \int_{\Omega} B\psi_\alpha + \int_{\Omega} |D\psi_\alpha| \quad (8.3.11)$$

### 8.3.2 Des solutions localement continues

Comme on ne sait pas montrer directement que (8.3.7) possède des solutions (à  $\alpha$  fixé), on considère un problème approché comme suggéré dans [78, 159] :

$$\inf_{\phi \in W^{1,2}(\Omega)} F_{\alpha,\beta}^\epsilon(\phi) \quad (8.3.12)$$

où :

$$F_{\alpha,\beta}^\epsilon(\phi) = \left( \int_{\Omega} g_\beta(\delta_\alpha(\phi) |\nabla \phi|) + \int_{\Omega} BH_\alpha(\phi) + \int_{\Omega} h_\beta(H_\alpha(\phi)) \right) + \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega} (\delta_\alpha(\phi) |\nabla \phi|)^2 \quad (8.3.13)$$

où la fonction  $g_\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par :

$$g_\beta(\xi) = \sqrt{|\xi|^2 + \beta^2} \quad (8.3.14)$$

et la fonction  $h_\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$h_\beta(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{\beta^5} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{(x-1)^4}{\beta^5} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad (8.3.15)$$

La fonction  $h_\beta$  est convexe et  $C^3$  sur  $\mathbb{R}$ . Lorsqu'on calcule l'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle (8.3.12), le terme provenant de  $\int_\Omega g_\beta(\delta_\alpha(\phi)|\nabla\phi|)$  correspond à celui du schéma numérique utilisé au Chapitre 7 (on introduit en effet un paramètre  $\beta > 0$  pour éviter les divisions par 0 dans le schéma numérique).

Il n'est toujours pas clair de montrer directement que (8.3.12) admet une solution, car  $g_\beta(\xi)$  dégénère en  $|\xi|$  lorsque  $\beta \rightarrow 0$ . On pose

$$\psi_\alpha = H_\alpha(\phi) \quad (8.3.16)$$

Cela implique  $\nabla\psi_\alpha = \delta_\alpha(\phi)\nabla\phi$  (car  $\phi \in W^{1,2}(\Omega)$ ). Cela nous conduit à considérer le problème :

$$\inf_{\psi \in W^{1,2}(\Omega)} G_\beta^\epsilon(\psi) \quad (8.3.17)$$

où :

$$G_\beta^\epsilon(\psi) = \left( \int_\Omega g_\beta(|\nabla\psi|) + \int_\Omega B\psi + \int_\Omega h_\beta(\psi) \right) + \frac{\epsilon}{2} \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \quad (8.3.18)$$

En fait, on montrera plus loin (Proposition 8.3.2) que les problèmes (8.3.12) et (8.3.17) sont équivalents.

**Remarque :** Dans les problèmes (8.3.17) et (8.3.21), il n'y a pas de contrainte  $0 \leq \psi \leq 1$ . Cette contrainte est intégrée dans la fonction  $h_\beta$ .

Dans toute la suite, le paramètre  $\beta$  dépendra du paramètre  $\alpha$  par la relation :

$$\beta(\alpha) = \left( \frac{4\alpha^3}{\|B\|_{L^\infty(\Omega)}} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (8.3.19)$$

(on verra la justification de cette relation dans la Preuve de la Proposition 8.3.1).

On a introduit les problèmes (8.3.17) et (8.3.12) afin d'obtenir des résultats sur l'existence et la régularité de leurs solutions éventuelles, puis de faire le passage à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  pour obtenir des renseignements sur les solutions des problèmes :

$$\inf_{\phi \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} F_{\alpha,\beta}^0(\phi) \quad (8.3.20)$$

et :

$$\inf_{\phi \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} G_\beta^0(\psi) \quad (8.3.21)$$

### 8.3.3 Un résultat de perturbation

Nous allons utiliser un théorème dû à R. Temam [159, 78]. Ce résultat repose sur un théorème de perturbation (théorème 1.1 page 125 de [159], [78] page 140). Ce théorème est lui même basé sur des résultats de Ladyzenskaya et Ural'Ceva [105, 106].

Le résultat de Temam a déjà été utilisé avec succès en traitement d'images dans [18] sous une forme légèrement modifiée. C'est ce résultat que nous allons utiliser :

Considérons donc une fonctionnelle de la forme :

$$\inf_{\psi \in W^{1,2}(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} g(|\nabla \psi|) + \int_{\Omega} p(x)\psi + \int_{\Omega} h(\psi) + \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 \right\} \quad (8.3.22)$$

Nous supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H8.3.1) La fonction  $\xi \rightarrow g(\xi)$  est convexe et  $C^3$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

(H8.3.2) La fonction  $x \rightarrow g(q(x))$  est mesurable sur  $\Omega$  pour tout  $q$  dans  $L^1(\Omega)^2$ .

Il existe des constantes  $\mu_i \geq 0$ ,  $i = 0, \dots, 8$ , telles que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^2$  :

(H8.3.3)

$$g(\xi) \geq \mu_0 |\xi| - \mu_1, \quad \mu_0 > 0$$

(H8.3.4)

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_i}(\xi) \leq \mu_2, \quad i = 1, 2$$

(H8.3.5)

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial g}{\partial \xi_i}(\xi) \xi_i \geq \mu_3 \sqrt{1 + |\xi|^2} - \mu_4, \quad \mu_3 > 0$$

(H8.3.6)

$$\frac{\mu_6 |\eta'|^2}{\sqrt{1 + |\xi|^2}} \leq \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi) \eta_i \eta_j \leq \frac{\mu_7 |\eta'|^2}{\sqrt{1 + |\xi|^2}} \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^2, \quad \mu_6, \mu_7 > 0$$

$$\text{où } |\eta'|^2 = |\eta|^2 - \frac{(\eta \cdot \xi)^2}{1 + |\xi|^2}.$$

(H8.3.7)

$$\|p\|_{W^{1,\infty}} \leq \mu_8$$

(H8.3.8)

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial g}{\partial \xi_i}(\xi) \xi_i \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2$$

(H8.3.9) La fonction  $t \rightarrow h(t)$  est convexe et  $h'(0) = 0$ .

**Théorème 8.3.1.** [Temam [78, 159]] *L'ouvert  $\Omega$  est supposé de classe  $C^2$ . Alors le problème (8.3.22) possède une solution régulière  $\psi_\epsilon$  bornée indépendamment de  $\epsilon$  dans  $L^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$ . Cette solution est unique sauf peut-être à une constante additive près.*

De plus, pour tout ouvert  $V$  relativement compact dans  $\Omega$ , il existe une constante  $K(V, \Omega)$  indépendante de  $\epsilon$  telle que :

$$\|\psi_\epsilon\|_{W^{1,\infty}(V)} \leq K(V, \Omega) \quad (8.3.23)$$

$$\|\psi_\epsilon\|_{H^2(V)} \leq K(V, \Omega) \quad (8.3.24)$$

On peut en particulier appliquer ce théorème au problème (8.3.17). On dispose d'ailleurs aussi d'un résultat de type principe du maximum pour le problème (8.3.17) :

**Proposition 8.3.1.** *La solution  $\psi_{\beta,\epsilon}$  du problème (8.3.17) donnée par le Théorème 8.3.1 est telle que :*

$$-A(\beta) \leq \psi_{\beta,\epsilon} \leq 1 + A(\beta) \quad (8.3.25)$$

où

$$A(\beta) = \left( \frac{\beta^5 \|B\|_{L^\infty(\Omega)}}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (8.3.26)$$

et

$$\|\psi_{\beta,\epsilon}\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leq |\Omega| (1 + A(\beta) + \beta + (1 + A(\beta))\|B\|_{L^\infty(\Omega)}) \quad (8.3.27)$$

En particulier, si  $\beta \leq 1$  (ce qui est équivalent à  $\alpha \leq \frac{\|B\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/3}}{4^{5/3}}$ , cf (8.3.19)) :

$$-A(1) \leq \psi_{\beta,\epsilon} \leq 1 + A(1) \quad (8.3.28)$$

et

$$\|\psi_{\beta,\epsilon}\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leq |\Omega| (A(1) + 2 + (1 + A(1))\|B\|_{L^\infty(\Omega)}) \quad (8.3.29)$$

Ce résultat nous permettra de faire la passage à la limite  $\alpha \rightarrow 0$ .

**Preuve de la Proposition 8.3.1 :** La preuve s'inspire de celle de la Proposition 4.1 page 147 dans [78]. On considère pour  $\epsilon$  et  $\lambda > 0$ , le problème :

$$\inf_{\phi \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} G_\beta^\epsilon(\psi) + \lambda \int_\Omega |\psi|^2 \quad (8.3.30)$$

où  $G_\beta^\epsilon$  est donnée par (8.3.18). L'existence et l'unicité d'une solution  $\psi_{\epsilon,\beta}^\lambda$  sont standards. On sépare ensuite la preuve en trois parties :

Etape 1 : On va montrer que

$$\|\psi_{\epsilon,\beta}^\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_0 \quad (8.3.31)$$

(on fixera la constante  $M_0$  dans la suite). Pour cela, on va d'abord montrer que :

$$\psi_{\epsilon,\beta}^\lambda(x) \leq M_1 \text{ p.p. } x \in \Omega \quad (8.3.32)$$

où  $M_1$  est une constante à préciser. Pour tout  $v \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ ,  $\psi_{\epsilon,\beta}^\lambda$  vérifie :

$$\int_\Omega \left[ \epsilon(\nabla \psi_{\epsilon,\beta}^\lambda, \nabla v) + 2\lambda \psi_{\epsilon,\beta}^\lambda v + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial g_\beta}{\partial \xi_i}(\nabla \psi_{\epsilon,\beta}^\lambda) \frac{\partial v}{\partial x_i} + (h'_\beta(\psi_{\epsilon,\beta}^\lambda) + B)v \right] dx = 0 \quad (8.3.33)$$

On choisit alors  $v = (\psi_{\epsilon,\beta}^\lambda - M_1)_+$  (où la fonction  $(x)_+$  vaut  $x$  si  $x \geq 0$ , et 0 sinon). On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \cap \{\psi_{\epsilon,\beta}^\lambda > M_1\}} \underbrace{[\epsilon |\nabla \psi_{\epsilon,\beta}^\lambda|^2 + 2\lambda \psi_{\epsilon,\beta}^\lambda (\psi_{\epsilon,\beta}^\lambda - M_1)]}_{\geq 0} dx \\ &= \int_{\Omega \cap \{\psi_{\epsilon,\beta}^\lambda > M_1\}} \underbrace{\left[ -\sum_{i=1}^2 \frac{\partial g_\beta}{\partial \xi_i} (\nabla \psi_{\epsilon,\beta}^\lambda) \frac{\partial \psi_{\epsilon,\beta}^\lambda}{\partial x_i} - (h'_\beta(\psi_{\epsilon,\beta}^\lambda) + B)(\psi_{\epsilon,\beta}^\lambda - M_1) \right]}_{\leq 0 \text{ d'après (H 8.3.8)}} dx \end{aligned}$$

D'où :

$$\left( -h'_\beta(M_1) + \|B\|_{L^\infty(\Omega)} \right) (\psi_{\epsilon,\beta}^\lambda - M_1)_+ \geq 0 \quad (8.3.34)$$

Si on impose

$$h'_\beta(M_1) > \|B\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (8.3.35)$$

on a alors  $(\psi_{\epsilon,\beta}^\lambda - M_1)_+ = 0$  ce qui démontre (8.3.32). Il nous suffit donc de fixer  $M_1$  de sorte que (8.3.35) soit vérifiée. Or :

$$h'_\beta(x) = \begin{cases} \frac{4x^3}{\beta^5} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{4(x-1)^3}{\beta^5} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad (8.3.36)$$

On en déduit que (8.3.35) est vérifié si et seulement si  $(M_1 \geq 1)$  :

$$\frac{4(M_1 - 1)^3}{\beta^5} > \|B\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (8.3.37)$$

i.e. si et seulement si :

$$M_1 > 1 + \left( \frac{\beta^5 \|B\|_{L^\infty(\Omega)}}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (8.3.38)$$

De la même manière, on obtiendrait aussi :

$$\psi_{\epsilon,\beta}^\lambda(x) \geq M_2 \text{ p.p. } x \in \Omega \quad (8.3.39)$$

si

$$M_2 < - \left( \frac{\beta^5 \|B\|_{L^\infty(\Omega)}}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (8.3.40)$$

En posant  $M_0 = \max(M_1, -M_2) = M_1$ , on déduit (8.3.31).

Etape 2 : On veut borner :  $\|\nabla \psi_{\epsilon,\beta}^\lambda\|_{L^1(\Omega)}$  On a :

$$G_\beta^\epsilon(\psi_{\epsilon,\beta}^\lambda) + \lambda \int_{\Omega} |\psi_{\epsilon,\beta}^\lambda|^2 \leq G_\beta^\epsilon(0) = \beta |\Omega| \quad (8.3.41)$$

où  $|\Omega| = \int_{\Omega} dx$ . Or (en utilisant (8.3.31))

$$G_\beta^\epsilon(\psi_{\epsilon,\beta}^\lambda) + \lambda \int_{\Omega} |\psi_{\epsilon,\beta}^\lambda|^2 \geq \|\nabla \psi_{\epsilon,\beta}^\lambda\|_{L^1(\Omega)} - \|B\|_{L^\infty(\Omega)} |\Omega| M_0 \quad (8.3.42)$$

D'où :

$$\|\nabla \psi_{\epsilon,\beta}^\lambda\|_{L^1(\Omega)} \leq |\Omega| (\beta + M_0 \|B\|_{L^\infty(\Omega)}) \quad (8.3.43)$$

On montre de même que :

$$\|\nabla \psi_{\epsilon,\beta}^\lambda\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{2M_0 \|B\|_{L^\infty(\Omega)} |\Omega|}{\epsilon}} \quad (8.3.44)$$

D'autre part, en utilisant (8.3.31), on obtient :

$$\|\psi_{\epsilon,\beta}^\lambda\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \quad (8.3.45)$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $\lambda$ .

Etape 3 : En faisant le passage à la limite  $\lambda \rightarrow 0$ , on obtient l'existence de  $\psi_{\epsilon,\beta} \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , et  $\psi_{\epsilon,\beta}$  vérifie (8.3.31). De plus, on montre comme dans l'étape précédente que  $\nabla \psi_{\epsilon,\beta}$  vérifie toujours (8.3.43). Il vient ensuite (en utilisant (8.3.31)) :

$$\|\psi_{\epsilon,\beta}^\lambda\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leq M_0 |\Omega| + |\Omega| (\beta + M_0 \|B\|_{L^\infty(\Omega)}) \quad (8.3.46)$$

où on rappelle que  $M_0 \geq 1 + \left(\frac{\beta^5 \|B\|_{L^\infty(\Omega)}}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ .

■

**Corollaire 8.3.1.** *On suppose que le paramètre  $\beta$  est donné par (8.3.19). On a alors :*

$$-\alpha \leq \psi_{\beta,\epsilon} \leq 1 + \alpha \quad (8.3.47)$$

**Preuve :** C'est une conséquence immédiate de la Proposition 8.3.1.

■

Grâce au Théorème (8.3.1), on peut passer à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  dans le problème (8.3.17). On obtient ainsi le résultat suivant (cf [78, 159]) :

**Corollaire 8.3.2.** *On suppose que  $B \in W^{1,\infty}(\Omega)$ , et  $\Omega$  à bord  $C^2$ . Le problème (8.3.21) admet alors une solution régulière  $\psi_\beta$  dans  $L^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$ , et celle-ci est unique sauf peut-être à une constante additive près. De plus, pour tout ouvert  $V$  relativement compact dans  $\Omega$ , il existe une constante  $K(V, \Omega)$  telle que :*

$$\|\psi_\beta\|_{W^{1,\infty}(V)} \leq K(V, \Omega) \quad (8.3.48)$$

$$\|\psi_\beta\|_{H^2(V)} \leq K(V, \Omega) \quad (8.3.49)$$

**Remarques :**

1. De (8.3.49), on déduit que  $\psi_\beta$  est dans  $Lip(V)$  pour tout ouvert  $V$  relativement compact dans  $\Omega$  (grâce aux injections de Sobolev [2, 42]).
2. L'hypothèse  $B \in W^{1,\infty}(\Omega)$  n'est malheureusement pas forcément vérifiée pour une image, mais elle intervient de manière cruciale dans le résultat [159].

### 8.3.4 “Equivalence” entre les problèmes (8.3.12) et (8.3.17)

On peut maintenant monter qu'à  $\alpha$  fixé, les problèmes (8.3.20) et (8.3.21) ont même valeur.

**Proposition 8.3.2.** *On a :*

$$\inf_{\phi} F_{\alpha,\beta(\alpha)}^0(\phi) = \inf_{\psi} G_{\beta}^0(\psi) \quad (8.3.50)$$

**Preuve :** Soit  $\phi \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ . On pose  $\psi_{\alpha} = H_{\alpha}(\phi)$ . On a :

$$F_{\alpha,\beta}^0(\phi) = G_{\beta}^0(\psi_{\alpha}) \geq \inf_{\psi} G_{\beta}^0(\psi) \quad (8.3.51)$$

D'après le Théorème 8.3.1, on sait que le problème (8.3.17) admet une solution  $\psi_{\beta}$ . Donc :

$$F_{\alpha,\beta}^0(\phi) \geq \inf_{\phi} F_{\alpha,\beta}^0(\phi) \geq \underbrace{\inf_{\psi} G_{\beta}^0(\psi)}_{=G_{\beta}^0(\psi_{\beta})} \quad (8.3.52)$$

D'après le Lemme 8.3.1, on peut définir  $\phi_{\alpha,\beta}$  tel que  $H_{\alpha}(\phi_{\alpha,\beta}) = \psi_{\beta}$ . On obtient alors :

$$\underbrace{F_{\alpha,\beta}^0(\phi_{\alpha,\beta})}_{=G_{\beta}^0(\psi_{\beta})} \geq \inf_{\phi} F_{\alpha,\beta}^0(\phi) \geq \underbrace{\inf_{\psi} G_{\beta}^0(\psi)}_{=G_{\beta}^0(\psi_{\beta})} \quad (8.3.53)$$

■

### 8.3.5 Retour à $\phi$

On travaille ici à  $\alpha > 0$  fixé. Nous sommes passé de (8.3.7) à (8.3.9) en faisant le changement de variable  $\psi = H_{\alpha}(\phi)$ . Pour remonter à  $\phi$ , il nous suffit donc faire le changement de variable inverse.

**Corollaire 8.3.3.** *Le problème (8.3.20) admet une solution  $\phi_{\alpha} \in L^{\infty}(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$ . De plus, pour tout ouvert  $V$  relativement compact dans  $\Omega$ , on a :  $\phi_{\alpha} \in Lip(V)$ .*

**Preuve :** Considérons  $\psi_{\beta}$  une solution de (8.3.17) donnée par le Corollaire 8.3.2. On pose  $\phi_{\beta} = H_{\alpha}^{-1}(\psi_{\beta})$  (ce qui est licite d'après le Lemme 8.3.1). Et on conclut grâce à la Proposition 8.3.2.

■

**Corollaire 8.3.4.**  *$\beta$  étant donné par (8.3.19), on a :*

$$-1 - \alpha \leq \phi_{\alpha} \leq 1 + \alpha \quad (8.3.54)$$

**Preuve :** C'est une conséquence immédiate du Corollaire 8.3.1 et de la définition de  $H_{\alpha}$  (8.3.2).

■



### 8.3.6 Passage à la limite $\alpha \rightarrow 0$

**Proposition 8.3.3.** *Le problème (8.3.9) admet une solution  $\psi$  dans  $BV(\Omega)$ .*

**Preuve :** Il suffit de faire le passage à la limite  $\beta(\alpha) \rightarrow 0$  dans (8.3.21) (avec  $\epsilon = 0$ ) en utilisant la Proposition 8.3.1. ■

**Remarque :** Le passage à la limite  $\beta(\alpha) \rightarrow 0$  ne nous permet pas par contre de conserver plus de régularité pour  $\psi$ . Et dans ce cas, on ne sait plus remonter à la fonction  $\phi$ .

Cependant, grâce aux Propositions 8.3.3 et 8.3.2, on a montré qu'il existe une suite minimisante  $\phi_{\alpha_n}$  pour le problème (8.3.7). De plus, d'après le Corollaire 8.3.4, on sait qu'il existe  $\phi \in L^\infty(\Omega)$  tel qu'à une extraction près,  $\phi_{\alpha_n} \rightharpoonup \phi$  dans  $L^\infty(\Omega)$  faible \*. Mais on ne sait pas si  $\phi$  est solution du problème (8.2.2).

En pratique, comme nous l'avons dit au Chapitre 7, on prend  $\alpha = 3$  dans notre modèle numérique. En effet, si  $\alpha$  est trop petit, la bande étroite introduite par le support de  $\delta_\alpha$  donné par (7.3.1) est alors elle même trop petite pour pouvoir discrétiser les équations (7.4.4). Et la définition de  $\delta_\alpha$  (8.3.3) que nous utilisons dans ce chapitre entraîne le même problème lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ . En fait, en même temps que  $\alpha$  décroît vers 0, il faudrait également faire décroître le pas de discrétisation des équations d'évolution (ce dernier est fixé égal à la taille d'un pixel) (cf [16]).

## 8.4 . Problème à $n$ phases

Dans le cas de  $n$  phases, on ne dispose plus du résultat de régularité du Théorème 8.2.1. On va donc travailler ici avec la frontière réduite des ensembles (cf Définition 8.1.2). On ne dispose plus non plus du théorème de perturbation de Temam (Théorème 8.3.1) qui nous avait permis de trouver des solutions continues. Néanmoins, on peut quand même donner quelques éléments intéressants sur le cas  $n$  phases.

On suppose que  $B_i \in L^\infty(\Omega)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . On note :

$$\mathcal{E}(E_1, \dots, E_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq N, i \neq j} \mathcal{H}^1(\mathcal{F}E_i \cap \mathcal{F}E_j) \quad (8.4.1)$$

**Remarque :** On a [6] :

$$2 \sum_{i=1}^N P(E_i, \Omega) = \sum_{1 \leq i, j \leq N, i \neq j} \mathcal{H}^1(\mathcal{F}E_i \cap \mathcal{F}E_j) \quad (8.4.2)$$

On considère les problèmes suivants :

1.

$$\inf_{\{E_1, \dots, E_N\} \text{ partition de Caccioppoli}} \left( \mathcal{E}(E_1, \dots, E_n) + \sum_{i=1}^N \int_E B_i \right) \quad (8.4.3)$$

2.

$$\inf_{\psi_1, \dots, \psi_N \in BV(\Omega), 0 \leq \psi_i \leq 1 \forall i, \sum_{i=1}^N H(\psi_i) = 1p.p.} \sum_{i=1}^N \left( \int_\Omega |D\psi_i| + \int_\Omega B_i \psi_i \right) \quad (8.4.4)$$

On rappelle qu'une partition de Caccioppoli de  $\Omega$  est une partition de  $\Omega$  en ensembles de périmètre fini.

### 8.4.1 Etude du problème (8.4.3)

**Théorème 8.4.1.** *Le problème (8.4.3) admet au moins une solution  $(\psi_1, \dots, \psi_N)$  [6].*

**Remarque :** Comme les  $E_i$  sont de périmètres finis, on sait [8] que  $\partial^* E_i$  est rectifiable  $C^1$  à un ensemble de mesure  $\mathcal{H}^1$  nulle près.

### 8.4.2 Lien entre (8.4.3) et (8.4.4)

**Proposition 8.4.1.** *Soit  $(E_1, \dots, E_N)$  une solution du problème (8.4.3). On note  $\psi_i = \mathbf{1}_{E_i}$ . Alors  $(\psi_1, \dots, \psi_N)$  est solution de (8.4.4).*

**Preuve :** Il suffit d'adapter la preuve de la Proposition 8.2.2, et d'utiliser le Théorème 8.4.1. ■

## 8.5 . Conclusion et perspectives

Nous avons effectué ici une étude mathématique complète de la fonctionnelle de classification utilisée au Chapitre 7 dans le cas de deux phases. Les résultats de cette étude dans le cas de deux phases permettent de donner un cadre théorique à de nombreux modèles de classification utilisés en traitement d'images [27, 151, 144, 52, 165]. En particulier, à  $\alpha$  fixé, nous avons montré l'existence d'une solution continue, ce qui justifie l'approche numérique du Chapitre 7.

Par-contre, le problème n'est que partiellement résolu dans le cas de  $n$  phases.

Il reste également à étudier plus précisément le passage à la limite  $\alpha \rightarrow 0$ . Mais comme nous l'avons dit précédemment, ce passage nécessite aussi de faire décroître le pas de discrétisation, problème que nous n'avons pas abordé ici.

Enfin, notre étude théorique n'a porté que sur la fonctionnelle de classification, mais pas sur les équations d'Euler-Lagrange associée. Il faudrait étudier plus en détail le lien qui unit ces dernières à la fonctionnelle de classification. Pour étudier les équations d'Euler-Lagrange dans le cas de deux phases, on peut penser à utiliser la théorie des solutions de viscosité, cette théorie s'étant révélée adaptée pour l'équation de courbure moyenne [17]. En effet, dans le cas de la fonctionnelle (8.0.2), l'équation d'Euler-Lagrange associée s'écrit :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \delta_\alpha(\Phi) \left( -\operatorname{div} \left( \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \right) + B \right) \quad (8.5.1)$$

On retrouverait une équation de type courbure moyenne en remplaçant le terme  $\delta_\alpha(\Phi)$  par  $|\nabla \Phi|$ . Mais c'est justement la présence de ce terme qui permet de contourner la singularité dans l'équation de courbure moyenne, et il ne nous paraît pas possible d'adopter directement la même approche dans notre cas. Une autre piste pourrait être l'utilisation de solutions renormalisées comme dans [9], mais là aussi l'adaptation à notre cas est loin d'être évidente.

Dans le cas de  $n$  phases, les équations d'Euler-Lagrange forment un système couplé. Il n'existe que très peu de résultats mathématiques quand à l'existence de solutions continues pour un tel système [134, 167].

# Chapitre 9

## Etude théorique de l'équation de réinitialisation

Dans ce dernier chapitre, nous étudions l'équation de réinitialisation que nous avons utilisée dans l'algorithme de classification d'images texturées décrit au Chapitre 7.

### 9.1 . Introduction

En traitement d'images, la fonction distance signée joue un rôle important de part ses propriétés particulières. Par exemple, en segmentation d'images, une question capitale concerne la détection des contours dans une scène. Une méthode efficace (cf l'annexe D) consiste à faire évoluer l'ensemble de niveau zéro d'une fonction distance  $u_0$  initiale jusqu'à ce qu'il atteigne les contours souhaités. Malheureusement, l'Equation aux Dérivées Partielles (EDP) dirigeant l'évolution ne garantit pas que la solution de cette EDP,  $v(x, t)$  reste une fonction distance signée. En particulier, son gradient peut numériquement exploser, ce qui est à l'origine de nombreux problèmes numériques. Pour résoudre ce problème, J-M Morel a proposé de réinitialiser le processus en utilisant toutes les cinq ou dix itérations l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \text{signe}(v(x, t_0)) (|Du| - 1) = 0 \\ u(x, 0) = v(x, t_0) \end{cases} \quad (9.1.1)$$

où  $v(x, t_0)$  est la fonction d'évolution au temps  $t_0$  ( $t_0 = 5$  ou  $10$ ). Nous renvoyons le lecteur à la littérature abondante sur ce sujet [17, 170, 122, 48, 151, 158, 146, 1, 15, 47] pour plus de détails.

Bien que l'EDP (9.1.1) soit régulièrement utilisée en traitement d'images, son étude théorique n'a jamais été effectuée (à notre connaissance). L'EDP (9.1.1) est une EDP de type Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(x, Du) = 0 \quad (9.1.2)$$

La théorie des solutions de viscosité s'est révélée être un cadre bien adapté pour montrer des résultats d'existence et d'unicité pour de telles EDP (cf [65, 66, 33, 99, 98, 79, 115, 34, 31, 81, 32, 4]). Mais tous ces travaux se placent sous l'hypothèse que l'opérateur hamiltonien  $H$  est continu par rapport à toutes ses variables, alors que l'EDP (9.1.1) possède une singularité sur  $\Gamma = \{x/v(x, t_0) = 0\}$ . Il s'agit en effet de la spécificité de notre travail : les

opérateurs hamiltoniens que nous allons considérer ne seront pas continus par rapport à la variable d'espace  $x$ . Nous allons néanmoins donner un résultat d'existence et d'unicité, et aussi obtenir une formule de Hopf-Lax explicite. La littérature concernant les solutions de viscosité pour des opérateurs hamiltoniens discontinus n'est pas très abondante. Le cas de solutions discontinues est considéré dans [33, 4], et celui d'une discontinuité dans le second membre de l'EDP dans [100, 156, 155, 86]. A notre connaissance, il n'existe pas d'autre travail relatif à une discontinuité du type de celle de l'EDP (9.1.1).

Dans ce chapitre, nous commençons par présenter quelques propriétés de la fonction distance signée dans la Section 9.2. Nous étudions aussi le squelette d'une courbe dans  $\mathbb{R}^2$ , et nous obtenons une description complète de sa fermeture. Nous donnons une condition suffisante pour que la fermeture du squelette d'une courbe de  $\mathbb{R}^2$  soit de mesure de Lebesgue nulle (ce qui complète des résultats de Matheron [154]).

Dans la Section 9.3, nous effectuons l'étude complète de l'EDP (9.1.1). Nous montrons un résultat d'existence et d'unicité, et nous obtenons une formule explicite pour la solution ainsi que son comportement asymptotique. Cela généralise les résultats classiques sur les opérateurs hamiltoniens continus. Nous montrons en effet que la fonction  $u(x, t)$  définie par

$$u(x, t) = \begin{cases} \epsilon_x \inf_{|y| \leq t} (\epsilon_x u_0(x + y) + t) & \text{if } t \leq t_x \\ \epsilon_x d(x, \Gamma) & \text{if } t > t_x \end{cases} \quad (9.1.3)$$

où

$$\begin{cases} u_0(x) = v(x, t_0) \\ \epsilon_x = \text{signe}(u_0(x)) \\ t_x = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ / \inf_{|y| \leq t} (\epsilon_x u_0(x + y)) = 0\} = d(x, \Gamma) \end{cases}$$

est solution de viscosité de (9.1.1), et que cette solution est unique dans la classe des solutions uniformément continues de (9.1.1) et s'annulant sur  $\Gamma = \{x / u_0(x) = 0\}$ .

Dans la Section 9.4, nous nous intéressons à une classe plus générale d'EDP. Sous des hypothèses techniques raisonnables, nous obtenons le même genre de résultat. Les principaux résultats de ce chapitre sont les Théorèmes 9.3.1 et 9.4.1.

Nous avons présenté l'essentiel de ce travail dans [12, 22, 21].

## 9.2 . Distance euclidienne signée

### 9.2.1 Quelques définitions

Munissons  $\mathbb{R}^2$  de la norme euclidienne et de la topologie induite. Dans toute la section 9.2, les distances considérées seront euclidiennes. Soit  $\Gamma$  une courbe de  $\mathbb{R}^2$ , on suppose :

(H9.2.1)  $\Gamma$  est  $C^2$  par morceaux.

(H9.2.2)  $\Gamma$  a un nombre fini de composantes connexes  $\Gamma_i$ .

(H9.2.3)  $\forall i$ , on peut paramétrer  $\Gamma_i$  par son abscisse curviligne  $\gamma : [0; L_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$  (où  $L_i$  est la longueur de  $\Gamma_i$ ) telle que la courbure  $\kappa(\gamma(t))$  ne change qu'un nombre fini de fois de signe sur  $[0; L_i]$  ( $\kappa$  est à valeur dans  $\mathbb{R}$ ).

(H9.2.4) Les points où  $\Gamma$  n'est pas de classe  $C^2$  sont des points anguleux (i.e. de courbure infinie).

(H9.2.5)  $\forall i$ ,  $\Gamma_i$  est géométriquement fermée, i.e.  $\gamma(0) = \gamma(L_i)$ .

(H9.2.6)  $\Gamma$  sera toujours orientée dans le sens indirect.

Dans toute la suite de la section 9.2, nous considérerons une courbe  $\Gamma$  vérifiant ces hypothèses (sauf mention explicite), et nous nous contenterons d'appeler une telle courbe  $\Gamma$  courbe fermée de  $\mathbb{R}^2$ .

Notons  $\Gamma = \partial\Omega$  et appelons  $\Omega$  l'intérieur de la courbe  $\Gamma$ .

**Définition 9.2.1.** Soit  $\Gamma$  une courbe fermée de  $\mathbb{R}^2$ , et une fonction :  $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  telle que  $u(\Gamma) = 0$ .

On dit que  $u$  est une distance signée par rapport à la courbe  $\Gamma$  si :

$$u(x) = \begin{cases} \epsilon d(x, \Gamma) & \text{si } x \text{ est à l'extérieur de } \Gamma \\ -\epsilon d(x, \Gamma) & \text{si } x \text{ est à l'intérieur de } \Gamma \end{cases} \quad (9.2.1)$$

où :

1.  $d(x, \Gamma) = \inf_{y \in \Gamma} \|x - y\|$
2.  $\epsilon \in \{\pm 1\}$
3.  $\|x\|$  désigne la norme euclidienne de  $x$ .

Dans toute la suite, on prendra comme convention  $\epsilon = 1$ , et nous parlerons donc de la distance signée.

**Remarques :**

1. Nous allons voir plus loin (Définition 9.2.3) que la convention  $\epsilon=1$  est en fait liée au choix d'orientation de  $\Gamma$  dans le sens indirect.
2. On peut généraliser la définition 9.2.1 à une distance  $d$  quelconque sur  $\mathbb{R}^2$  (autre que la distance euclidienne). C'est d'ailleurs ce que l'on fera dans la Section 9.3.

**Définition 9.2.2.** On appelle squelette de  $\Gamma$  l'ensemble :

$\{ x \in \mathbb{R}^2 / \text{il existe au moins 2 points distincts } y \text{ et } z \text{ dans } \Gamma \text{ tels que :}$

$$\|x - y\| = \|x - z\| = d(x, \Gamma) \}$$

On note  $S$  le squelette, et  $\bar{S}$  sa fermeture.

Un exemple de squelette est décrit dans la Figure 9.1.

**Remarque :** Soit  $x \in \mathbb{R}^2$ . Puisque

$$\begin{cases} \Gamma \text{ est un fermé de } \mathbb{R}^2 \\ \{x\} \text{ est un compact de } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (9.2.2)$$

on sait donc qu'il existe au moins un élément  $y \in \Gamma$  tel que

$$\|x - y\| = d(x, \Gamma)$$

Nous noterons  $p(x)$  un tel  $y$ .

**Définition 9.2.3.** Nous appellerons "point de contact de degré 2" relativement à  $\Gamma$  tout point  $x \in \mathbb{R}^2$  tel que :

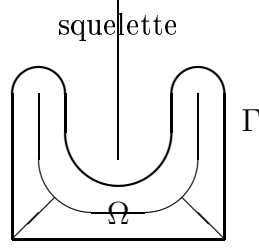
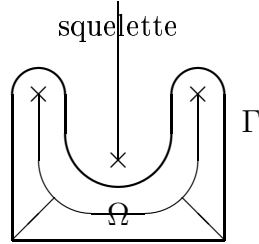


FIG. 9.1 – Exemple de squelette



Les croix représentent les “points de contact de degré 2”

FIG. 9.2 – “Points de contact de degré 2”

1.  $x$  n'est pas dans  $\Gamma$ .
- 2.

$$\kappa(p(x)) = \frac{1}{\epsilon \|x - p(x)\|} = \frac{1}{\epsilon d(x, \Gamma)} = \frac{1}{u(x)} \quad (9.2.3)$$

où  $u(x)$  est la distance signée à  $\Gamma$ ,  $p(x) \in \Gamma$ , et  $\kappa(y)$  désigne la courbure de  $\Gamma$  en  $y$ .

On montre un exemple de “points de contact de degré 2” sur la Figure 9.2.

### Remarques :

1. Un “point de contact de degré 2” peut appartenir au squelette (si par exemple  $\Gamma$  est un cercle,  $S$  est alors réduit au centre de ce cercle qui est aussi un “point de contact de degré 2”).
2. Si  $x$  est un “point de contact de degré 2”, alors le cercle de centre  $x$  et de rayon  $\|x - p(x)\|$  est en fait le cercle osculateur à  $\Gamma$  en  $p(x)$ . C'est pourquoi on parle de contact de degré 2.

## 9.2.2 Propriétés de la fonction distance signée

Dans cette sous-section, nous donnons quelques propriétés de la fonction distance signée.

### Résultats élémentaires

**Lemme 9.2.1.** *La distance signée  $u$  à une courbe fermée  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^2$  est 1-Lipschitzienne (fermée est ici à prendre au sens topologique).*

**Preuve :** La preuve est identique à celle de la Proposition 8.2.3. ■

**Proposition 9.2.1.** *Si  $u$  est une distance signée par rapport à une courbe fermée  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Gamma$  étant bornée, et si  $u \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{S}) \rightarrow \mathbb{R}$  où  $\bar{S}$  est la fermeture du squelette de  $\Gamma$ , alors on a  $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{S}$  :*

$$\|\nabla u(x)\| = 1 \quad (9.2.4)$$

**Remarque :** En fait le résultat reste vrai (la preuve est inchangée) dans le cas où  $u$  est seulement différentiable sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{S}$ . Et comme on vient de voir que  $u$  était différentiable presque partout, on en déduit :

$$\|\nabla u(x)\| = 1 \text{ presque partout} \quad (9.2.5)$$

### Une caractérisation de la distance signée

On donne ici une caractérisation de la fonction distance signée. Elle sera le point de départ de notre travail pour trouver une solution explicite de l'équation 9.1.1.

**Proposition 9.2.2.** *Soit  $\Gamma$  une courbe fermée de  $\mathbb{R}^2$ . Alors*

1.  *$u$  est la fonction distance à  $\Gamma$  si et seulement si*

$$\iff \begin{cases} u(x) \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R}^2 \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \Gamma \\ u(x) = \inf_{|y|=h} (u(x+y) + h) & \forall h \in [0, d(x, \Gamma)] \end{cases} \quad (9.2.6)$$

2.  *$u$  est l'opposée de la fonction distance à  $\Gamma$  si et seulement si*

$$\iff \begin{cases} u(x) \leq 0 & \forall x \in \mathbb{R}^2 \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \Gamma \\ u(x) = \sup_{|y|=h} (u(x+y) - h) = -\inf_{|y|=h} (-u(x+y) + h) & \forall h \in [0, d(x, \Gamma)] \end{cases} \quad (9.2.7)$$

3.  *$u$  est la fonction distance signée à  $\Gamma$  si et seulement si*

$$\iff \begin{cases} u(x) = 0 & \text{si } x \in \Gamma \\ u(x) \geq 0 & \text{si } x \text{ est à l'extérieur de } \Gamma \\ u(x) \leq 0 & \text{si } x \text{ est à l'intérieur de } \Gamma \\ u(x) = \epsilon_x \inf_{|y|=h} (\epsilon_x u(x+y) + h) & \forall h \in [0, d(x, \Gamma)] \end{cases} \quad (9.2.8)$$

$$\text{où } \epsilon_x = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est à l'extérieur de } \Gamma \\ -1 & \text{si } x \text{ est à l'intérieur de } \Gamma \end{cases}$$

**Preuve :** Nous nous contenterons de montrer le premier point de la proposition. Les autres points se prouvent de la même manière.

Etape 1 : On suppose ici que  $u$  est la fonction distance à  $\Gamma$ .

Il est donc évident que :  $u(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \Gamma$  (car  $\Gamma$  est fermé). Soit  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . On veut montrer que :

$$u(x) = \inf_{|y|=h} (u(x+y) + h) \quad \forall h \in [0, u(x)] \quad (9.2.9)$$



(ici  $u(x) = d(x, \Gamma)$ ). Il est équivalent de montrer que :

$$\inf_{z \in \Gamma} |x - z| = \inf_{|y|=h} (\inf_{z \in \Gamma} |x + y - z| + h) \quad \forall h \in [0, u(x)] \quad (9.2.10)$$

Soit encore :

$$\inf_{z \in \Gamma} |x - z| = \inf_{z \in \Gamma} (\inf_{|y|=h} |x + y - z| + h) \quad \forall h \in [0, u(x)] \quad (9.2.11)$$

C'est cette dernière égalité (9.2.11) que nous allons démontrer.

- D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$|x + y - z| + h \geq \underbrace{|x - z| - |y| + h}_{=|x-z| \text{ si } |y|=h} \quad (9.2.12)$$

Donc :

$$\inf_{|y|=h} (|x + y - z|) + h \geq |x - z| \quad (9.2.13)$$

D'où :

$$\inf_{z \in \Gamma} (\inf_{|y|=h} |x + y - z| + h) \geq \inf_{z \in \Gamma} |x - z| \quad \forall h \in [0, u(x)] \quad (9.2.14)$$

Et on a ainsi montré une inégalité dans un sens.

- Supposons par l'absurde qu'il existe  $h \in ]0, u(x)]$  tel que l'inégalité inverse soit stricte, i.e. :

$$\inf_{z \in \Gamma} |x - z| < \inf_{z \in \Gamma} (\inf_{|y|=h} |x + y - z| + h) \quad (9.2.15)$$

Soit encore :

$$u(x) < h + \underbrace{\inf_{z \in \Gamma} (\inf_{|y|=h} |x + y - z|)}_{\inf_{z \in \Gamma} (\inf_{|w-x|=h} |w - z|)} \quad (9.2.16)$$

Comme  $\Gamma$  est fermée, on sait qu'il existe  $\bar{z} \in \Gamma$  tel que  $u(x) = d(x, \Gamma) = |x - \bar{z}|$ .

Donc

$$u(x) < h + \inf_{|w-x|=h} |w - \bar{z}| \quad (9.2.17)$$

On choisit

$$\bar{w} = \frac{h}{u(x)} \bar{z} + \frac{-h + u(x)}{u(x)} x \quad (9.2.18)$$

i.e :  $\bar{w} - x = \frac{h}{u(x)} (\bar{z} - x)$ , ce qui implique :

$$|\bar{w} - x| = h \frac{|\bar{z} - x|}{u(x)} = h \quad (9.2.19)$$

Donc  $\bar{w}$  est admissible. On a de plus :

$$|\bar{w} - \bar{z}| = \frac{u(x) - h}{u(x)} |x - \bar{z}| = u(x) - h \quad (9.2.20)$$

On obtient ainsi avec (9.2.17) que  $u(x) < u(x)$ , ce qui est évidemment absurde. Ceci achève la preuve de (9.2.11).

Etape 2 : Pour montrer la réciproque, il suffit de prendre  $h = d(x, \Gamma)$  :

$$u(x) = \underbrace{\inf_{|y|=d(x, \Gamma)} (u(x + y))}_{=0} + d(x, \Gamma) \quad (9.2.21)$$

■

### 9.2.3 Adhérence du squelette

On termine cette sous-section en donnant notre résultat principal sur la fermeture du squelette.

**Théorème 9.2.1.** *La fermeture  $\bar{S}$  du squelette  $S$  d'une courbe  $\Gamma$  fermée de  $\mathbb{R}^2$  vérifiant les hypothèses (H9.2.1)-(H9.2.6) est constituée de  $S$ , de "points de contact de degré 2", et de points de  $\Gamma$  où  $\Gamma$  est non  $C^2$ .*

**Preuve du Théorème 9.2.1 :** Nous allons utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.

Soit donc  $(x_n) \in S^{\mathbb{N}}$  et  $((y_n), (z_n)) \in \Gamma^{\mathbb{N}} \times \Gamma^{\mathbb{N}}$  (avec  $y_n \neq z_n \forall n$ ) tels que  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

$$\|x_n - y_n\| = \|x_n - z_n\| = d(x_n, \Gamma) \quad (9.2.22)$$

On suppose que  $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}^2$ . On veut savoir "où" peut être  $x$ .

Soit  $r > 0$ .

Comme  $x_n \rightarrow x$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0$ ,  $x_n \in B(x, r)$ .

Soit  $\rho = d(x, \Gamma)$ .

$$\|x_n - y_n\| = d(x_n, \Gamma) \leq \|x - x_n\| + d(x, \Gamma) \leq r + \rho \quad (9.2.23)$$

On a donc

$$\|y_n - x\| \leq \|y_n - x_n\| + \|x_n - x\| \leq \rho + 2r \quad (9.2.24)$$

Et de même :

$$\|z_n - x\| \leq \rho + 2r \quad (9.2.25)$$

Nous avons donc :  $\forall n \geq n_0$ ,  $y_n$  et  $z_n \in B(x, \rho+2r)$ .

$(y_n)$  et  $(z_n)$  sont 2 suites bornées de  $\mathbb{R}^2$ , donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe  $y \in \mathbb{R}^2$  et  $z \in \mathbb{R}^2$  tels que, à une extraction près :

$$y_n \rightarrow y \text{ et } z_n \rightarrow z \quad (9.2.26)$$

De plus,  $(y_n)$  et  $(z_n)$  sont des suites de  $\Gamma$  qui est fermée, donc  $y \in \Gamma$  et  $z \in \Gamma$ .

Et par passage à la limite dans (9.2.22), nous obtenons finalement que :

$$\|x - y\| = \|x - z\| = d(x, \Gamma) \quad (9.2.27)$$

Deux cas sont désormais possibles :

Cas 1 :  $y$  et  $z$  sont 2 points distincts, auquel cas  $x \in S$ .

Cas 2 :  $y = z = p(x)$ . Et donc :

$$y_n \rightarrow y \text{ et } z_n \rightarrow y \quad (9.2.28)$$

D'où pour  $n$  assez grand, les points  $y_n$  et les  $z_n$  sont sur une même composante connexe de  $\Gamma$  (en effet, les composantes connexes de  $\Gamma$  étant fermées, elles sont toutes à des distances strictement positives les unes des autres).

On veut montrer que  $x$  est soit un "point de contact de degré 2", soit un point de  $\Gamma$  où  $\Gamma$  n'est pas de classe  $C^2$  (donc un point anguleux d'après l'hypothèse (H9.2.4)).

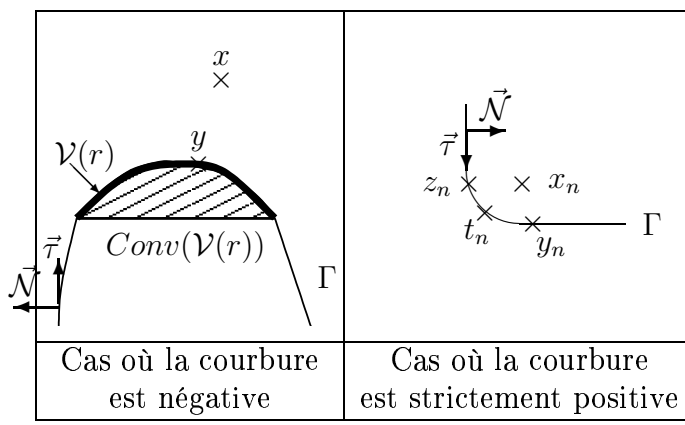


FIG. 9.3 – Convexité ou concavité locale de  $\Gamma$

D'après l'hypothèse (H9.2.3),  $\Gamma$  est localement concave ou convexe. Nous allons paramétrer  $\Gamma$  autour de  $y$  dans le sens indirect.

Etape 1 : Supposons d'abord que  $\Gamma$  soit de classe  $C^2$  au voisinage de  $y$ . Montrons d'abord que la courbure est localement strictement positive. Par l'absurde, on suppose qu'il existe  $r > 0$  tel que  $\kappa(z) \leq 0$  pour tout  $z \in \mathcal{V}(r) = B(y, r) \cap \Gamma$ , où  $B(y, r)$  est un disque ouvert de centre  $y$  et de rayon  $r$ . On note  $\mathcal{C}$  l'enveloppe convexe de  $\mathcal{V}(r)$  (cf Figure 9.3). Comme le projeté sur un ensemble convexe fermé est unique, on a  $y_n = z_n$ , ce qui par hypothèse est absurde. La courbure de  $\Gamma$  doit donc être strictement positive au voisinage de  $y$ , i.e. dans  $\mathcal{V}(r)$ .

On écrit  $r_n = \|x_n - y_n\|$ . La courbure du cercle  $\mathcal{C}_n$  dont le centre est  $x_n$  et de rayon  $r_n$ , est égale à  $\frac{1}{r_n}$ . Comme  $\mathcal{C}_n$  est tangent à  $\Gamma$  (intérieurement) en  $y_n$  (car  $\|x_n - y_n\| = d(x_n, \Gamma)$ ), on a :

$$\kappa(y_n) \leq \frac{1}{r_n} \quad (9.2.29)$$

En effet, si  $\kappa(y_n) > \frac{1}{r_n}$ , alors localement, au voisinage de  $y$ , la courbe  $\Gamma$  se trouve à l'intérieur du disque ouvert dont le bord est  $\mathcal{C}_n$ . Et cela ne peut être vrai puisque  $\|x_n - y_n\| = d(x_n, \Gamma)$ .

Et on montre de la même manière que :

$$\kappa(z_n) \leq \frac{1}{r_n} \quad (9.2.30)$$

Mais comme la courbure de  $\Gamma$  est positive sur  $\mathcal{V}(r)$ , alors nécessairement il existe  $t_n$  dans  $\mathcal{V}(r)$  entre  $y_n$  et  $z_n$  tel que :

$$\kappa(t_n) \geq \frac{1}{r_n} \quad (9.2.31)$$

En effet, si on suppose que  $t_n$  n'existe pas, alors en chaque point sur  $\Gamma$  situé entre  $y_n$  et  $z_n$ , on a :  $0 < \kappa(t) < \frac{1}{r_n}$ . Mais cela ne peut être vrai (cf Figure 9.4).

De plus, comme  $(y_n)$  et  $(z_n)$  tendent vers  $y$ , il en est de même pour  $(t_n)$ . Et donc, en passant à la limite lorsque  $n \rightarrow \infty$  dans les inégalités suivantes :  $\kappa(y_n) \leq \frac{1}{r_n} \leq \kappa(t_n)$ , on obtient (puisque  $\kappa$  est  $C^0$  en  $y$ ) :  $\frac{1}{r} = \kappa(y) = \kappa$  où  $r = \|x - y\|$ .

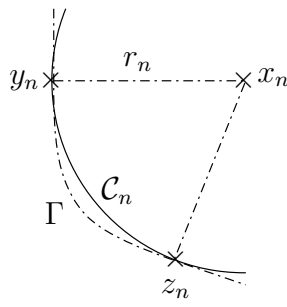


FIG. 9.4 – Courbure de  $\Gamma$

Le cercle  $\mathcal{C}$ , de centre  $x$  et de rayon  $r$ , est le cercle osculateur à  $\Gamma$  en  $y$ . Donc  $y$  est un point de contact double entre  $\Gamma$  et  $\mathcal{C}$ . D'où  $x$  est un point de contact de degré 2.

Etape 2 : Supposons maintenant que  $\Gamma$  soit non  $C^2$  en  $y$

Cas 1 : Si on suppose qu'il existe  $r > 0$  tel que la courbure de  $\Gamma$  soit négative dans  $\mathcal{V}(r) \setminus \{y\} = \{B(y, r) \cap \Gamma\} \setminus \{y\}$ , on tombe alors sur la même contradiction que dans le cas où  $\Gamma$  est de classe  $C^2$  au voisinage de  $y$  et où il existe  $r > 0$  tel que la courbure de  $\Gamma$  soit négative dans  $\{B(y, r) \cap \Gamma\}$ .

Cas 2 : Supposons maintenant le cas inverse :  $\forall r > 0$ , il existe  $t \in \mathcal{V}(r) \setminus \{y\} = \{B(y, r) \cap \Gamma\} \setminus \{y\}$  tel que  $\kappa(t) > 0$ .

Quitte à réduire  $r$ , on peut supposer que  $\mathcal{V}(r)$  possède deux composantes connexes  $\mathcal{V}_1(r)$  et  $\mathcal{V}_2(r)$ . D'après l'hypothèse (H9.2.3), la courbure de  $\Gamma$  est donc strictement positive sur  $\mathcal{V}_1(r)$  et/ou  $\mathcal{V}_2(r)$ . Supposons par exemple que la courbure de  $\Gamma$  soit strictement positive sur  $\mathcal{V}_1(r)$ .

En procédant comme dans le cas où il existe  $r > 0$  tel que la courbure de  $\Gamma$  soit strictement positive dans  $B(y, r) \cap \Gamma$ , nous obtenons :

$$\kappa(y_n) \leq \frac{1}{r_n} \quad (9.2.32)$$

Et il vient donc en passant à la limite (en se rappelant que d'après l'hypothèse (H9.2.3),  $\kappa(y) = \infty$ ) que  $r = 0$ , ie  $x \in \Gamma$  et  $\Gamma$  non  $C^2$  en  $x$ .

C'est en fait un cas dégénéré du cas précédent.

■

**Lemme 9.2.2.** *Soit  $\Gamma$  une courbe fermée de  $\mathbb{R}^2$  vérifiant les hypothèses (H9.2.1)-(H9.2.6), et  $S$  son squelette. Si  $x$  est un "point de contact de degré 2", alors  $|\kappa(p(x))|$  est un maximum local strict de  $|\kappa|$  et  $\Gamma$  tourne sa concavité vers  $x$  au voisinage de  $p(x)$ . De plus à chaque maximum local strict de  $\kappa$  est associé au plus un "point de contact de degré 2".*

**Preuve :** Il suffit de reprendre les arguments de la démonstration du théorème 9.2.1 dans la partie concernant les "points de contact de degré 2".

■

**Corollaire 9.2.1.**

1. *Le squelette  $S$  d'une courbe  $\Gamma$  fermée de  $\mathbb{R}^2$  est de mesure de Lebesgue nulle.*
2. *L'adhérence du squelette  $\bar{S}$  d'une courbe  $\Gamma$  fermée de  $\mathbb{R}^2$ , vérifiant les hypothèses (H9.2.1)-(H9.2.6), est de mesure de Lebesgue nulle.*

**Preuve :**

Etape 1 : La première partie du corollaire est une conséquence du fait que la fonction distance signée soit lipschitzienne. En effet, le théorème de Rademacher (cf [79]) nous permet d'affirmer que  $u$  est différentiable presque partout. Donc  $S$  est bien de mesure nulle.

Etape 2 : Montrons maintenant le deuxième point à partir du premier.

On sait donc que  $mes(S) = 0$ , et on veut montrer que  $mes(\bar{S}) = 0$ .

Or d'après le Théorème 9.2.1,  $\bar{S}$  est inclu dans  $S \cup S_1 \cup S_2$ , avec :

$S_1 = \{\text{L'ensemble des "points de contact de degré 2"}\}$

$S_2 = \{\text{L'ensemble des points de } \Gamma \text{ où } \Gamma \text{ non } C^2\}$

D'après le Lemme 9.2.2 et l'hypothèse (H9.2.3),  $S_1$  possède au plus un nombre fini de points, donc  $mes(S_1) = 0$ .

$S_2$  est inclu dans  $\Gamma$  qui est de mesure de Lebesgue nulle. Donc  $mes(S_2) = 0$ .

D'où  $mes(\bar{S}) = 0$ .

■

**Remarque :** Dans [154], G.Matheron montre que le squelette d'une courbe quelconque de  $\mathbb{R}^2$  est d'intérieur vide (au sens topologique). Mais il donne aussi un exemple de courbe de  $\mathbb{R}^2$  dont l'adhérence du squelette possède une mesure de Lebesgue non nulle. Le deuxième point du corollaire 9.2.1 peut donc être considéré comme optimal.

## 9.3 . L'équation de réinitialisation

Le but de cette section est d'étudier l'EDP de Hamilton-Jacobi suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \text{signe}(u_0(x)) (|Du| - 1) = 0 \\ u(., 0) = u_0 \end{cases} \quad (9.3.1)$$

où

$$\text{signe}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (9.3.2)$$

L'équation (9.3.1) est utilisée en traitement d'image dans la méthode des contours actifs [17, 170, 122, 47, 48, 158, 146, 15]; et nous l'utilisons dans notre algorithme de classification du Chapitre 7. Nous montrerons par la suite que la fonction distance signée est asymptotiquement solution de l'EDP (9.3.1).

On peut remarquer que dans l'équation (9.3.1) l'opérateur hamiltonien est discontinu en la variable d'espace  $x$ . Dans le cas où l'opérateur hamiltonien est continu, la théorie

des solutions de viscosité fournit des résultats d'existence et d'unicité pour de telles EDP [33, 99, 98, 81, 31, 32]. Mais les travaux concernant des opérateurs discontinus sont encore peu nombreux [100, 156, 155, 86]. La littérature actuelle ne fournit pas de réponse quant à l'existence ou à l'unicité de solutions de viscosité de (9.3.1).

### 9.3.1 Rappels sur les solutions de viscosité

La notion de solution de viscosité s'applique aux équations définies sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  de la forme suivante :

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad (9.3.3)$$

et elle s'étend très facilement aux équations d'évolution :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad (9.3.4)$$

Dans le cas de (9.3.4), les notations  $Du$  et  $D^2u$  correspondent respectivement aux dérivées premières et secondes en espace.

La définition des solutions de viscosité s'introduit naturellement à partir du principe du maximum. Elle permet de reporter la régularité de la solution sur une fonction test (on retrouve la même idée dans la théorie des distributions). Pour de plus amples détails sur cette théorie, nous renvoyons le lecteur à [33, 65, 66].

Soit  $f$  une fonction localement bornée. On notera respectivement  $f_*$  et  $f^*$  les enveloppes semi-continue inférieurement (sci) et semi-continues supérieurement (scs) de  $f$  :

$$f_*(x) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y) \quad (9.3.5)$$

$$f^*(x) = \limsup_{y \rightarrow x} f(y) \quad (9.3.6)$$

**Remarque :** Nous ne donnons les définitions des solutions de viscosité que dans le cas des équations stationnaires (du type (9.3.3)), mais la généralisation aux équations d'évolution (du type (9.3.4)) est immédiate.

**Définition 9.3.1.** Le hamiltonien  $F$  est supposée défini en tout point et localement borné.

(i) Une fonction  $u$  localement bornée, scs sur  $\Omega$ , est une sous-solution de viscosité de (9.3.3) si et seulement si :

$\forall \Phi \in C^2(\Omega)$ , si  $x_0 \in \Omega$  est un point de maximum local de  $u - \Phi$  on a :

$$F_*(x_0, u(x_0), D\Phi(x_0), D^2\Phi(x_0)) \leq 0 \quad (9.3.7)$$

(ii) Une fonction  $u$  localement bornée, sci sur  $\Omega$ , est une sur-solution de viscosité de (9.3.3) si et seulement si :

$\forall \Phi \in C^2(\Omega)$ , si  $x_0 \in \Omega$  est un point de minimum local de  $u - \Phi$  on a :

$$F^*(x_0, u(x_0), D\Phi(x_0), D^2\Phi(x_0)) \geq 0 \quad (9.3.8)$$

(iii) Nous appellerons solution de viscosité de (9.3.3) toute fonction continue satisfaisant (9.3.7) et (9.3.8).

### 9.3.2 Existence et unicité d'une solution de viscosité pour l'EDP (9.3.1)

Dans cette sous-section, on considère une fonction  $u_0$  uniformément continue sur  $\mathbb{R}^2$ . On note  $\Gamma = \{x/u_0(x) = 0\}$ . Pour  $x \in \mathbb{R}^2$ , on écrit  $\epsilon_x = \text{signe}(u_0(x))$  et  $d(x, \Gamma)$  la distance de  $x$  à  $\Gamma$ . Le but de cette sous-section est de montrer que la fonction  $u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^2$  définie par :

$$u(x, t) = \begin{cases} \epsilon_x \inf_{|y| \leq t} (\epsilon_x u_0(x + y) + t) & \text{si } t \leq t_x \\ \epsilon_x d(x, \Gamma) & \text{si } t > t_x \end{cases} \quad (9.3.9)$$

où

$$t_x = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ / \inf_{|y| \leq t} (\epsilon_x u_0(x + y)) = 0\} = d(x, \Gamma) \quad (9.3.10)$$

est une solution de viscosité de (9.3.1).

On note  $\Omega_+ = \{x/u_0(x) > 0\}$  l'extérieur (au sens strict) de  $\Gamma$ , et  $\Omega_- = \{x/u_0(x) < 0\}$  l'intérieur (au sens strict) de  $\Gamma$  ( $\mathbb{R}^2 = \Omega_+ \cup \Omega_- \cup \Gamma$ ).

**Proposition 9.3.1.** *Soit  $u_0$  une fonction uniformément continue sur  $\mathbb{R}^2$ . On pose  $\Gamma = \{x/u_0(x) = 0\}$ . Alors  $u$  définie par (9.3.9) est une fonction uniformément continue sur  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ .*

Remarque : Une conséquence immédiate de la définition de  $t_x$  est que  $x \mapsto t_x$  est continu sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Preuve :**

Nous allons montrer que  $u$  donnée par (9.3.9) est bien uniformément continue sur  $\Omega \times [0, T]$   $\forall T > 0$ . Pour cela, nous allons montrer que  $u$  est uniformément continue sur  $\Omega_+ \times [0, T]$   $\forall T > 0$ , sur  $\Omega_- \times [0, T]$ ,  $\forall T > 0$ , et sur  $\mathcal{V} \times [0, T]$   $\forall T > 0$  (où  $\mathcal{V}$  est un voisinage dans  $\mathbb{R}^2$  de  $\{x/u_0(x) = 0\}$ ), ce qui nous donnera le résultat.

(i)Premier cas :

Montrons donc que  $u$  est uniformément continue sur  $\Omega_+ \times [0, T]$ ,  $\forall T > 0$ . Pour cela, on commence par fixer  $T > 0$ .

Soit  $(x, t)$  et  $(\hat{x}, \hat{t})$  dans  $\Omega_+ \times [0, T]$ .

Etape 1 : Supposons d'abord que  $\hat{t} \leq t_{\hat{x}}$  et  $t \leq t_x$ . Alors, si on note  $\rho$  le module de continuité de  $u_0$  (défini par  $\rho(r) = \sup(|u(x) - u(y)| / |x - y| \leq r)$ , on a :

$$u(x, t) - u(\hat{x}, \hat{t}) = \inf_{\{|y| \leq t\}} (u_0(x + y) + t) - \inf_{\{|y| \leq \hat{t}\}} (u_0(\hat{x} + y) + \hat{t}) \quad (9.3.11)$$

Comme  $u_0$  est continue, il existe  $\hat{b} \in B(\hat{x}, \hat{t})$  (où  $B(z, r)$  désigne la boule ouverte dans  $\mathbb{R}^2$  de centre  $z$  et de rayon  $r$ ) telle que

$$u_0(\hat{b}) = \inf_{\{|y| \leq \hat{t}\}} (u_0(\hat{x} + y))$$

Comme  $\hat{b} \in B(\hat{x}, \hat{t})$ , il existe  $\lambda \in [0, 1]$  tel que  $|\hat{x} - \hat{b}| = \lambda \hat{t}$ . Soit  $a$  sur  $C(x, \lambda t)$  (où  $C(z, r)$  désigne le cercle dans  $\mathbb{R}^2$  de centre  $z$  et de rayon  $r$ ) tel que  $(\hat{x} - \hat{b}, x - a) =$

$-|\hat{x} - \hat{b}||x - a|$  (où  $(\cdot, \cdot)$  désigne le produit scalaire euclidien). En particulier, on a  $a \in B(x, t)$  (puisque  $|\lambda| \leq 1$ ). Et ainsi (9.3.11) devient :

$$\begin{aligned} u(x, t) - u(\hat{x}, \hat{t}) &= \inf_{\{|y| \leq t\}} (u_0(x + y) + t) - u_0(\hat{b}) - \hat{t} \\ &\leq u_0(a) - u_0(\hat{b}) + t - \hat{t} \\ &\leq \rho(|a - \hat{b}|) + t - \hat{t} \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} |a - \hat{b}| &= |a - x + x - \hat{x} + \hat{x} - \hat{b}| \\ &\leq \underbrace{|a - x + \hat{x} - \hat{b}|}_{= \lambda|t - \hat{t}| \leq |t - \hat{t}|} + |x - \hat{x}| \end{aligned}$$

Comme  $\rho(r + s) \leq \rho(r) + \rho(s)$ , on en déduit que :

$$u(x, t) - u(\hat{x}, \hat{t}) \leq \rho(|x - \hat{x}|) + |t - \hat{t}| + \rho(|t - \hat{t}|)$$

On montre de même que :

$$u(x, t) - u(\hat{x}, \hat{t}) \geq -(\rho(|x - \hat{x}|) + |t - \hat{t}| + \rho(|t - \hat{t}|))$$

On obtient finalement que :

$$|u(x, t) - u(\hat{x}, \hat{t})| \leq \rho(|x - \hat{x}|) + |t - \hat{t}| + \rho(|t - \hat{t}|) \quad (9.3.12)$$

Etape 2 : Supposons maintenant que  $t \geq \hat{t} \geq \max(t_x, t_{\hat{x}})$ . On a alors :

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u(\hat{x}, \hat{t})| &= |u(x, t_x) - u(\hat{x}, t_{\hat{x}})| \\ &= |d(x, \Gamma) - d(\hat{x}, \Gamma)| \end{aligned}$$

D'où, comme la distance euclidienne est 1-lipschitzienne :

$$|u(x, t) - u(\hat{x}, \hat{t})| \leq |x - \hat{x}| \quad (9.3.13)$$

Etape 3 : Supposons enfin que  $\hat{t} \geq t_{\hat{x}}$  et  $t \leq t_x$ . On a alors :

$$|u(x, t) - u(\hat{x}, \hat{t})| = |u(x, t) - u(\hat{x}, t_{\hat{x}})|$$

On peut estimer la différence  $|u(x, t) - u(\hat{x}, t_{\hat{x}})|$  de la même manière que dans l'Etape 1. En utilisant (9.3.12), on obtient donc :

$$|u(x, t) - u(\hat{x}, t_{\hat{x}})| \leq \rho(|x - \hat{x}|) + |t - t_{\hat{x}}| + \rho(|t - t_{\hat{x}}|)$$

D'où :

$$|u(x, t) - u(\hat{x}, \hat{t})| \leq \rho(|x - \hat{x}|) + |t_x - t_{\hat{x}}| + \rho(|t_x - t_{\hat{x}}|)$$

Or

$$|t_x - t_{\hat{x}}| \leq |d(x, \Gamma) - d(\hat{x}, \Gamma)| \leq |x - \hat{x}|$$

Et finalement :

$$|u(x, t) - u(\hat{x}, \hat{t})| \leq \rho(|x - \hat{x}|) + |t_x - t_{\hat{x}}| + \rho(|t_x - t_{\hat{x}}|) \quad (9.3.14)$$



On en déduit ainsi l'uniforme continuité de  $u$  sur  $\Omega_+ \times [0, T]$ , car, comme  $u_0$  uniformément continue, on a  $\rho(r) \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow 0^+$ .

(ii) Etape 2 : On montre comme précédemment que  $u$  est également uniformément continue sur  $\Omega_- \times [0, T] \forall T > 0$ .

Etape 3 : Montrons enfin qu'il existe  $\mathcal{V}$  un voisinage dans  $\mathbb{R}^2$  de  $\{x/u_0(x) = 0\}$  tel que :  $\forall T > 0$ ,  $u$  est continue sur  $\mathcal{V} \times [0, T]$  (le théorème de Heine nous permettra de conclure que  $u$  est uniformément continue sur  $\mathcal{V} \times [0, T]$ ).

En fait il suffit de prendre pour  $\mathcal{V}$  un voisinage quelconque dans  $\mathbb{R}^2$  de  $\{x/u_0(x) = 0\}$ . On sait déjà d'après ce qui précède que  $u$  est continue sur  $(\mathcal{V} \times [0, T]) \setminus \{x/u_0(x) = 0\}$ . Pour conclure, il suffit donc de montrer que  $u$  est continue sur  $\{x/u_0(x) = 0\}$ .

Fixons  $T > 0$ .

Soit  $\epsilon > 0$ . Il existe  $\delta > 0$  tel que :  $(0 \leq r \leq \delta) \Rightarrow (\rho(r) \leq \frac{\epsilon}{3})$ . Il existe  $\eta > 0$  tel que :  $(d(x, \Gamma) \leq \eta) \Rightarrow (|u_0(x)| \leq \frac{\epsilon}{3})$

Soit  $x \in \mathbb{R}^2$  tel que  $d(x, \Gamma) \leq \min(\delta, \eta, \frac{\epsilon}{3})$ . Rappelons que  $t_x = d(x, \Gamma)$ . Deux cas se présentent :

Cas 1 : Si  $t \leq t_x$ , alors :

$$|u(x, t)| = \left| \inf_{\{|y| \leq t\}} (u_0(x + y) + t) \right| = \inf_{\{|y| \leq t\}} |u_0(x + y)| + t$$

(car  $t_x = d(x, \Gamma)$ ). On a donc :

$$|u(x, t)| \leq |u_0(x)| + \rho(t_x) + t_x \leq \epsilon$$

Cas 2 : Si  $t > t_x$ , alors :

$$|u(x, t)| = d(x, \Gamma) \leq \frac{\epsilon}{3} \leq \epsilon$$

On en déduit ainsi le résultat voulu. ■

On donne maintenant le résultat principal de cette section.

**Théorème 9.3.1.** *Soit  $u$  définie par (9.3.9). Alors  $u$  est solution de viscosité de (9.3.1). De plus,  $u$  est unique dans la classe des solutions de viscosité uniformément continues sur  $\mathbb{R}^2 \times [0, T]$ ,  $\forall T > 0$ , et s'annulant sur  $\Gamma$ ,  $\forall t \in [0, T]$ .*

**Preuve :**

*Première partie : existence d'une solution.*

Nous montrons ici que la fonction  $u$  définie par (9.3.9) est bien solution de viscosité de 9.3.1. D'après la Proposition 9.3.1, on sait déjà que  $u$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ . On fixe  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ . Soit  $\Phi$  une fonction  $C^2$  telle que  $u - \Phi$  ait un maximum local en  $(x_0, t_0)$ .

(i) Etape 1 : Supposons d'abord  $u(x_0) \neq 0$ . Nous supposerons par exemple que  $u(x_0) > 0$ .

a) Si  $t_0 > t_{x_0}$  : On a  $u(x_0, t_0) = d(x_0, \Gamma)$  et  $\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) = 0$ . On veut donc montrer que  $F(x_0, D\Phi(x_0, t_0)) \leq 0$ , ie  $-1 + |D\Phi(x_0)| \leq 0$ . Par souci de clarté, nous n'écrivons pas

la dépendance en  $t$  qui ici n'intervient pas.

Pour  $x$  assez petit, on a :

$$h + u(x_0 + x) - \Phi(x_0 + x) \leq u(x_0) - \Phi(x_0) + h \quad (9.3.15)$$

$$\Leftrightarrow u(x_0 + x) + h \leq u(x_0) - \Phi(x_0) + \Phi(x_0 + x) + h \quad (9.3.16)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \underbrace{\inf_{|x|=h} (u(x_0 + x) + h)}_{=u(x_0)} \leq u(x_0) - \Phi(x_0) + \inf_{|x|=h} (\Phi(x_0 + x) + h) \\ & \text{d'après la proposition 9.2.2} \end{aligned} \quad (9.3.17)$$

D'où

$$\inf_{|x|=h} (\Phi(x_0 + x) - \Phi(x_0)) \geq -h \quad (9.3.18)$$

Or

$$\Phi(x_0 + x) - \Phi(x_0) = (D\Phi(x_0), x) + 0(h^2) \quad (9.3.19)$$

Donc

$$\begin{aligned} \inf_{|x|=h} (\Phi(x_0 + x) - \Phi(x_0)) &= \inf_{|x|=h} (-|x||D\phi(x_0)|) + 0(h^2) \\ &= -h|D\phi(x_0)| + 0(h^2) \end{aligned}$$

D'où

$$|D\phi(x_0)| \leq 1 + 0(h) \quad (9.3.20)$$

On en déduit ainsi que  $u$  est sous-solution de viscosité de (9.3.1) en  $(x_0, t_0)$ .

### Remarques :

1. Si  $u(x_0) < 0$ , il suffit de répéter la même preuve que précédemment en partant de l'inégalité :

$$-h + u(x_0 + y) - \Phi(x_0 + y) \leq u(x_0) - \Phi(x_0) - h \quad (9.3.21)$$

2. On peut également noter qu'on a en fait montré ici que la distance signée était solution de viscosité de l'équation stationnaire :  $\text{signe}(u_0)(|Du| - 1) = 0$ .

**b)** Si  $t_0 \leq t_{x_0}$  : Pour  $h$  et  $y$  assez petits ( $h > 0$ ), on a :

$$h + u(x_0 + y, t_0 - h) - \Phi(x_0 + y, t_0 - h) \leq u(x_0, t_0) - \Phi(x_0, t_0) + h \quad (9.3.22)$$

ce qui implique :

$$\inf_{|y|\leq h} (u(x_0 + y, t_0 - h) + h) \leq \inf_{|y|\leq h} (\Phi(x_0 + y, t_0 - h)) - \Phi(x_0, t_0) + h + u(x_0, t_0) \quad (9.3.23)$$

Or

$$\begin{aligned} \inf_{|y|\leq h} (u(x_0 + y, t_0 - h) + h) &= \inf_{|y|\leq h} \left( \inf_{|z|\leq t_0-h} (u_0(x_0 + y + z) + t_0) \right) \\ &= \underbrace{\inf_{|w|\leq t_0} (u_0(x_0 + w) + t_0)}_{=u(x_0, t_0)} \text{ d'après ( 9.3.9)} \end{aligned}$$

D'où

$$\Phi(x_0, t_0) \leq h + \inf_{|y| \leq h} (\Phi(x_0 + y, t_0 - h)) \quad (9.3.24)$$

Et donc

$$\Phi(x_0, t_0) - \Phi(x_0, t_0 - h) \leq \inf_{|y| \leq h} (\Phi(x_0 + y, t_0 - h) - \Phi(x_0, t_0 - h)) + h \quad (9.3.25)$$

Or

$$\Phi(x_0, t_0) - \Phi(x_0, t_0 - h) = h \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x_0, t_0) + 0(h^2) \quad (9.3.26)$$

et

$$\Phi(x_0 + y, t_0 - h) - \Phi(x_0, t_0 - h) = (D\Phi(x_0, t_0 - h), y) + 0(h^2) \quad (9.3.27)$$

donc

$$\begin{aligned} \inf_{|y| \leq h} (\Phi(x_0 + y, t_0 - h) - \Phi(x_0, t_0 - h)) &= \inf_{|y| \leq h} (-|y| |D\Phi(x_0, t_0 - h)|) + 0(h^2) \\ &= -h |D\Phi(x_0, t_0 - h)| + 0(h^2) \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x_0, t_0) \leq -|D\Phi(x_0, t_0 - h)| + 0(h) + 1 \quad (9.3.28)$$

Or

$$D\Phi(x_0, t_0 - h) = D\Phi(x_0, t_0) + 0(h) \quad (9.3.29)$$

Donc finalement

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x_0, t_0) + \underbrace{(|D\Phi(x_0, t_0 - h)| - 1)}_{=F(x_0, D\Phi(x_0, t_0))} \leq 0 \quad (9.3.30)$$

On en déduit ainsi que  $u$  est sous-solution de viscosité de (9.3.1) en  $(x_0, t_0)$ .

**Remarque :** Si  $u(x_0) < 0$ , il suffit de considérer l'égalité :

$$-h + u(x_0 + y, t_0 - h) - \Phi(x_0 + y, t_0 - h) \leq u(x_0, t_0) - \Phi(x_0, t_0) - h \quad (9.3.31)$$

et on montre de même que  $u$  est sur-solution de viscosité de (9.3.1) en  $(x_0, t_0)$ . Donc  $u$  est solution de viscosité de (9.3.1) en  $(x_0, t_0)$ .

(ii) Etape 2 : Supposons maintenant que  $u(x_0) = 0$ .

On a

$$F_*(x_0, D\Phi(x_0, t_0)) = \min(0, |D\Phi(x_0, t_0)| - 1, 1 - |D\Phi(x_0, t_0)|) \quad (9.3.32)$$

Et

$$F^*(x_0, D\Phi(x_0, t_0)) = \max(0, |D\Phi(x_0, t_0)| - 1, 1 - |D\Phi(x_0, t_0)|) \quad (9.3.33)$$

Donc

$$F_*(x_0, D\Phi(x_0, t_0)) \leq 0 \text{ et } F^*(x_0, D\Phi(x_0, t_0)) \geq 0 \quad (9.3.34)$$

Donc  $u$  est solution de viscosité de (9.3.1) en  $(x_0, t_0)$ .

■

On rappelle que :

$$\begin{cases} u_0(x) = 0 & \text{si } x \in \Gamma \\ u_0(x) \geq 0 & \text{si } x \in \Omega_+ \\ u_0(x) \leq 0 & \text{si } x \in \Omega_- \end{cases} \quad (9.3.35)$$

Considérons les deux problèmes suivants :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + |Du| - 1 = 0 \\ u(., 0) = u_0|_{\Omega_+} \\ u(x, t) = 0 \text{ si } x \in \Gamma \end{cases} \quad (9.3.36)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - (|Du| - 1) = 0 \\ u(., 0) = u_0|_{\Omega_-} \\ u(x, t) = 0 \text{ si } x \in \Gamma \end{cases} \quad (9.3.37)$$

Rappelons que  $u_0$  est supposée uniformément continue.

D'après les résultats classiques sur les solutions de viscosité (cf le théorème 1 dans [99]), le problème (9.3.36) (resp (9.3.37)) possède une unique solution de viscosité uniformément continue sur  $\Omega_+ \times [0, T]$ ,  $\forall T > 0$  (resp sur  $\Omega_- \times [0, T]$ ,  $\forall T > 0$ ). On peut montrer, en reprenant les arguments pour l'existence, que la solution de (9.3.36) (respectivement de (9.3.37)) est la restriction de la fonction (9.3.9) à  $\Omega_+ \times \mathbb{R}_+$  (respectivement à  $\Omega_- \times \mathbb{R}_+$ ). Comme de plus une solution de viscosité de (9.3.1) doit être continue, la seule solution possible est donc bien la fonction (9.3.9).

Ceci termine la preuve du théorème 9.3.1.

■

### Commentaires sur l'introduction de $t_x$ :

L'introduction de  $t_x$  dans la définition de (9.3.9) peut paraître arbitraire. Considérons la fonction  $v : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^2$

$$v(x, t) = \epsilon_x \inf_{|y| \leq t} (\epsilon_x u_0(x + y) + t) \quad (9.3.38)$$

On rappelle que  $\epsilon_x = \text{signe}(u_0(x))$ .

En reprenant les arguments de la partie existence du Théorème 9.3.1, on constate que  $v$  est solution de viscosité de l'EDP (9.3.1) sur  $\Omega_+ \times \mathbb{R}_+$  et sur  $\Omega_- \times \mathbb{R}_+$ . Mais  $v$  n'est pas nécessairement une fonction continue sur  $\Omega \times \mathbb{R}_+$ , et n'est donc pas solution de viscosité de l'EDP (9.3.1) sur  $\Omega \times \mathbb{R}_+$  (au sens de la Définition 9.3.1).

En effet, considérons l'exemple suivant en 1-D. Soit  $u_0(x)$  définie par :

$$u_0(x) = 2(|x| - 1) \quad (9.3.39)$$

On a donc  $\Omega_- = \{x; u_0(x) < 0\} = ]-1, 1[$

Il est facile dans ce cas de calculer les fonctions  $u$  et  $v$  données par (9.3.9) et (9.3.38). On obtient :

$$u(x, t) = \begin{cases} 2(|x| - 1) + t & \text{si } |x| \leq 1 \text{ et } t \leq 1 - |x| = t_x \\ |x| - 1 & \text{si } |x| \leq 1 \text{ et } t \geq 1 - |x| = t_x \\ 2(|x| - 1) - t & \text{si } |x| \geq 1 \text{ et } t \leq |x| - 1 = t_x \\ |x| - 1 & \text{si } |x| \geq 1 \text{ et } t \geq |x| - 1 = t_x \end{cases} \quad (9.3.40)$$

$$v(x, t) = \begin{cases} 2(|x| - 1) + t & \text{si } |x| \leq 1 \\ 2(|x| - 1) - t & \text{si } |x| \geq 1 \text{ et } t \leq |x| \\ t - 2 & \text{si } |x| \geq 1 \text{ et } t \geq |x| \end{cases} \quad (9.3.41)$$

$u$  est bien continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , mais ce n'est pas le cas pour  $v$  : il suffit en effet de considérer  $v(1 + \epsilon, t)$  et  $v(1 - \epsilon, t)$  pour  $t$  assez grand.

### 9.3.3 Simulation numérique de l'EDP de réinitialisation

On montre un exemple de réinitialisation avec l'EDP de réinitialisation (9.3.1) sur la Figure 9.5. Dans cet exemple, on a utilisé un schéma aux différences finies centrées pour discrétiser le terme  $Du$ , et un schéma d'Euler explicite pour le terme  $\frac{\partial u}{\partial t}$ . Pour les bords de  $\Omega$ , on a simplement choisi de calculer le terme  $Du$  par différences finies à gauche ou à droite. Cependant (comme on le voit d'ailleurs sur la Figure 9.5), un schéma aussi simple n'est pas stable (au bord de l'image, et surtout au niveau du squelette qui dans cet exemple est réduit au point central).

Une discrétisation efficace de l'EDP de réinitialisation (9.3.1) a été proposée dans [158]. On peut également trouver les détails de ce schéma dans [150, 17]. C'est d'ailleurs ce schéma numérique que nous utilisons lors de l'étape de réinitialisation de notre algorithme de classification d'image texturée présenté au Chapitre 7.

La simulation de la Figure 9.5 montre comment la réinitialisation d'une fonction en la fonction distance signée se réalise. On constate bien que la réinitialisation se fait d'abord au voisinage de la ligne de niveau zéro.

## 9.4 . Une équation plus générale

Dans cette section, on veut étendre les résultats de la section précédente à des opérateurs hamiltoniens discontinus plus généraux. On considère l'équation de Hamilton-Jacobi du premier ordre suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \text{signe}(u_0(x))H(Du) = 0 \\ u(., 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (9.4.1)$$

Dans la suite, nous ferons toujours au moins les hypothèses suivantes

(H9.4.1)  $u_0$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

(H9.4.2)  $H$  est une fonction convexe sur  $\mathbb{R}^2$ .

(H9.4.3)  $\lim_{|p| \rightarrow +\infty} \frac{H(p)}{|p|} = +\infty$ .

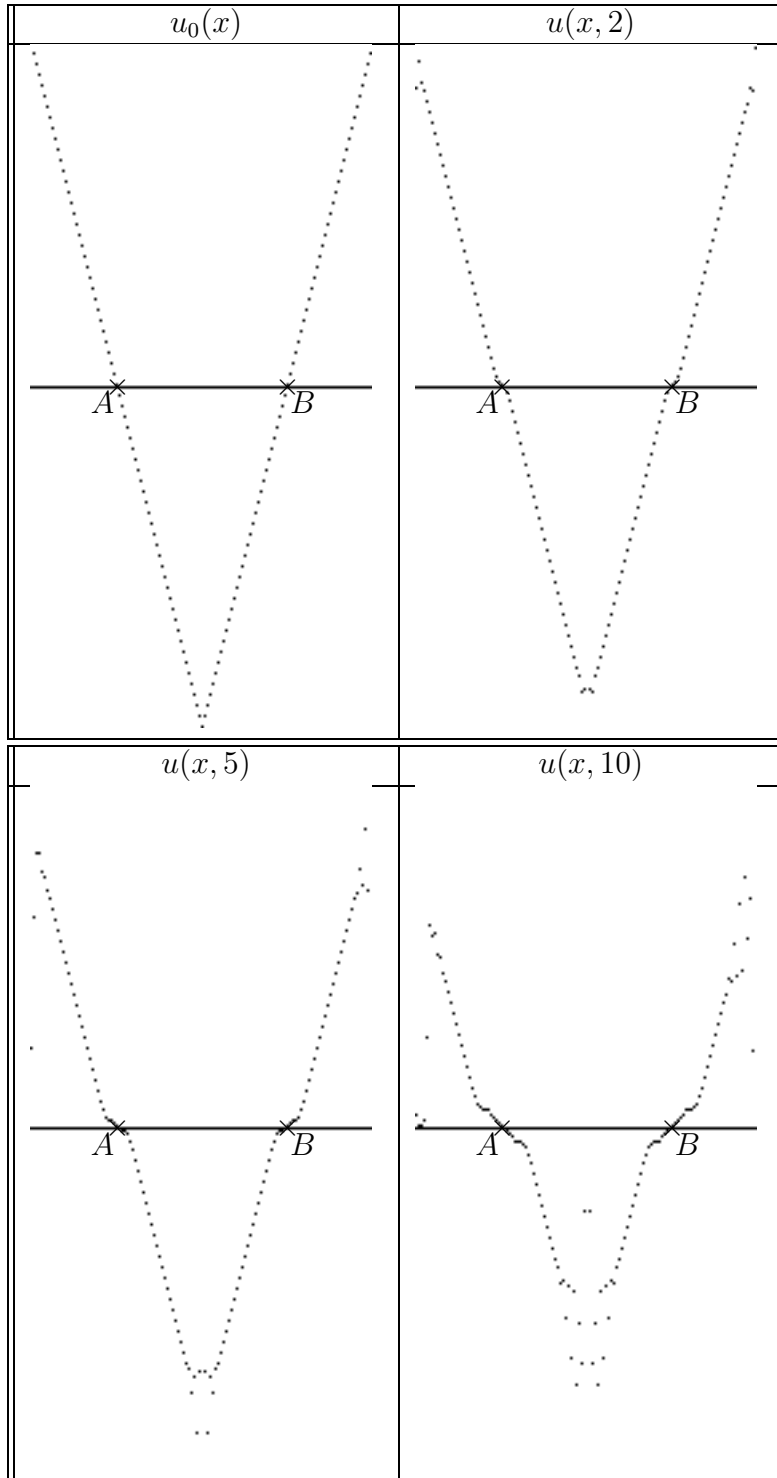


FIG. 9.5 – Réinitialisation de  $u_0(x) = 4d$  (où  $d$  désigne la fonction distance signée à  $\Omega = ]A, B[$ ) en  $d$ . Les points  $A$  et  $B$  sont sur la ligne de niveau zéro de  $u_0$  (ie  $u_0(A) = u_0(B) = 0$ ).

(H9.4.4)  $H(0) < 0$ , et  $\{p/H(p) = 0\}$  est non-vide et symétrique par rapport à 0 (i.e.  $\{H(p) = 0\} \Rightarrow \{H(-p) = 0\}$ ).

On note  $\Omega_+$  (resp.  $\Omega_-$ ) l'ouvert  $\{x/u_0(x) > 0\}$  (resp.  $\{x/u_0(x) < 0\}$ ), et  $\Gamma$  la frontière commune à  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$ , i.e.  $\Gamma = \{x/u_0(x) = 0\}$ .

On considère la fonction :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x) & \text{si } x \in \Gamma \\ \inf_{z \in \mathbb{R}^2} [u_0(x - tz) + tH^*(z)] & \text{si } x \in \Omega_+ \text{ et } t \leq t_x \\ d_L(x, \Gamma) & \text{si } x \in \Omega_+ \text{ et } t > t_x \\ \sup_{z \in \mathbb{R}^2} [u_0(x + tz) - tH^*(z)] & \text{si } x \in \Omega_- \text{ et } t \leq t_x \\ -d_L(x, \Gamma) & \text{si } x \in \Omega_- \text{ et } t > t_x \end{cases} \quad (9.4.2)$$

où  $t_x$  est défini par :

$$t_x = \begin{cases} \inf\{t \in \mathbb{R}_+ / \inf_{z \in \mathbb{R}^2} [u_0(x - tz) + tH^*(z)] = d_L(x, \Gamma)\} & \text{si } x \in \Omega_+ \\ \inf\{t \in \mathbb{R}_+ / \sup_{z \in \mathbb{R}^2} [u_0(x + tz) - tH^*(z)] = -d_L(x, \Gamma)\} & \text{si } x \in \Omega_- \end{cases} \quad (9.4.3)$$

Notre but est de montrer qu'en rajoutant quelques hypothèses techniques, la fonction  $u(x, t)$  définie par (9.4.2) est l'unique solution de viscosité de (9.4.1) s'annulant sur  $\Gamma$ .

$d_L$  est la distance associée à l'opérateur hamiltonien  $H$  et sera définie dans la sous-section 9.4.1. On rappelle que  $H^*$  désigne la transformée de Legendre-Fenchel de  $H$  :

$$H^*(z) = \sup_{p \in \mathbb{R}^N} ((p, z) - H(p)) \quad (9.4.4)$$

### Remarques :

1. La plupart des résultats de la Section 9.4 restent vrais lorsque (H 9.4.3) est remplacée par  $\lim_{|p| \rightarrow +\infty} H(p) = +\infty$ .
2. On attire l'attention du lecteur sur le comportement asymptotique de la solution  $u(x, t)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Ce genre de résultat, à notre connaissance, semble nouveau pour des opérateurs hamiltoniens discontinus.
3.  $t_x$  est tel que  $u(x, t_x) = d_L(x, \Gamma)$  si  $x \in \Omega_+$  et  $u(x, t_x) = -d_L(x, \Gamma)$  si  $x \in \Omega_-$ , et  $x \mapsto d_L(x, \Gamma)$  est la solution de viscosité de l'équation stationnaire  $H(Du) = 0$  (cf Corollaire 9.4.1).

## 9.4.1 Préliminaires techniques

### Outils d'analyse convexe

On va utiliser des outils classiques d'analyse convexe.

1.  $H^*$  est toujours convexe, et  $H^*(0) = -\inf H(p)$
2. Comme on suppose que  $\lim_{|p| \rightarrow +\infty} \frac{H(p)}{|p|} = +\infty$ , on a aussi (cf [79]) :

$$\lim_{|p| \rightarrow +\infty} \frac{H^*(p)}{|p|} = +\infty \quad (9.4.5)$$

3. Si  $F_i$  est une famille de fonctions de  $\mathbb{R}^N$  dans  $(-\infty, \infty)$ , on a (cf [147]) :

$$\left(\inf_i F_i\right)^* = \sup_i F_i^* \quad (9.4.6)$$

$$\forall \lambda > 0, (\lambda F)^* = \lambda F^* \left(\frac{u}{\lambda}\right) \quad (9.4.7)$$

4. Si  $H$  est convexe, on a  $\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \geq \inf_{\mathbb{R}^2} H$  :

$$\sup_{\{p/H(p)=t\}} (x, p) = \inf_{\{\lambda > 0\}} \left( t\lambda + \lambda H^* \left( \frac{x}{\lambda} \right) \right) \quad (9.4.8)$$

Cette dernière formule provient de [115].

## Distance associée à l'opérateur hamiltonien $H$

**Définition 9.4.1.** Pour  $H$  vérifiant les hypothèses (H 9.4.2) et (H 9.4.4), on définit :

$$L(x) = \max_{\{p/H(p)=0\}} (x, p) \quad (9.4.9)$$

où  $(\cdot, \cdot)$  désigne le produit scalaire euclidien sur  $\mathbb{R}^2$ .  $L$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$ . La distance associée à cette norme est donnée par :

$$d_L(x, y) = L(x - y) \quad (9.4.10)$$

On note :

$$d_L(x, \Gamma) = \inf_{y \in \Gamma} L(x - y) \quad (9.4.11)$$

$L$  est appelée norme associée à l'opérateur hamiltonien  $H$ , et  $d_L$  une  $L$ -distance (pour la distinguer de la distance euclidienne).

$L$  vérifie la proposition suivante :

**Proposition 9.4.1.** Si  $\Gamma$  est une courbe fermée dans  $\mathbb{R}^2$ , alors :

(i)  $u$  est la fonction  $L$ -distance à  $\Gamma$  si et seulement si

$$\begin{cases} u(x) \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R}^2 \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \Gamma \\ u(x) = \inf_{\{L(y)=h\}} (u(x+y) + h) & \forall h \in [0, d_L(x, \Gamma)] \end{cases} \quad (9.4.12)$$

(ii)  $u$  est l'opposée de la fonction  $L$ -distance à  $\Gamma$  si et seulement si

$$\begin{cases} u(x) \leq 0 & \forall x \in \mathbb{R}^2 \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \Gamma \\ u(x) = \sup_{\{L(y)=h\}} (u(x+y) - h) = -\inf_{\{L(y)=h\}} (-u(x+y) + h) & \forall h \in [0, d_L(x, \Gamma)] \end{cases} \quad (9.4.13)$$

(iii)  $u$  est la fonction  $L$ -distance signée à  $\Gamma$  si et seulement si

$$\begin{cases} u(x) = 0 & \text{si } x \in \Gamma \\ u(x) \geq 0 & \text{si } x \text{ est à l'extérieur de } \Gamma \\ u(x) \leq 0 & \text{si } x \text{ est à l'intérieur de } \Gamma \\ u(x) = \epsilon_x \inf_{\{L(y)=h\}} (\epsilon_x u(x+y) + h) & \forall h \in [0, d_L(x, \Gamma)] \end{cases} \quad (9.4.14)$$

$$\text{où } \epsilon_x = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est à l'extérieur de } \Gamma \\ -1 & \text{si } x \text{ est à l'intérieur de } \Gamma \end{cases}$$



**Preuve :** Comme  $L$  est une norme, la preuve est identique à celle de la Proposition 9.2.2. ■

## D'autres outils

Nous aurons également besoin du lemme suivant :

**Lemme 9.4.1.** Soit  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $h \geq 0$  et  $t \geq 0$ . On a la formule suivante :

$$\inf_z [u_0(x - (t+h)z) + (t+h)H^*(z)] = \inf_{\xi} \inf_y [u_0(x - h\xi - ty) + tH^*(y) + hH^*(\xi)]$$

Preuve : On écrit :

$$\begin{aligned} A &= \inf_z [u_0(x - (t+h)z) + (t+h)H^*(z)] \\ B &= \inf_{\xi} \inf_y [u_0(x - h\xi - ty) + tH^*(y) + hH^*(\xi)] \end{aligned}$$

Il est clair que  $B \leq A$ . Montrons l'inégalité inverse : Soit  $\xi$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^2$ , et  $h$  et  $t > 0$  (le cas où  $h$  ou  $t = 0$  est évident). Soit  $z = \frac{h\xi + ty}{h+t}$ . On a :

$$\begin{aligned} &u_0(x - (t+h)z) + (t+h)H^*(z) = \\ &u_0(x - h\xi - ty) + (t+h)H^*\left(\frac{h\xi}{h+t} + \frac{ty}{h+t}\right) \end{aligned}$$

On utilise alors le fait que  $H^*$  est convexe :

$$(t+h)H^*\left(\frac{h\xi + ty}{h+t}\right) \leq hH^*(\xi) + tH^*(y) \quad (9.4.15)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} &u_0(x - (t+h)z) + (t+h)H^*(z) \leq \\ &u_0(x - h\xi - ty) + hH^*(\xi) + tH^*(y) \end{aligned}$$

ce qui implique (en prenant l'infimum en  $z$  dans le terme de gauche et le maximum en  $y$  et  $\xi$  dans le terme de droite)

$$A \leq B \quad (9.4.16) \quad \blacksquare$$

## 9.4.2 Inégalités de viscosité et unicité pour l'équation (9.4.1)

Pour montrer que  $u(x, t)$  donnée par (9.4.2) est une solution de (9.4.1), on doit examiner quatre points :

- (i)  $u(x, t)$  vérifie les inégalités de viscosité (9.3.7) et (9.3.8).
- (ii)  $u(x, t)$  est l'unique solution de (9.4.1) s'annulant sur  $\Gamma$ .
- (iii) L'existence et la continuité de  $t_x$ .
- (iv)  $u(x, t)$  est uniformément continue.

On commence par montrer les deux premiers points dans cette sous-section. Il nous faudra rajouter quelques hypothèses sur  $u_0$  pour obtenir les deux derniers points.

### (i) Inégalité de viscosité

**Proposition 9.4.2.** *On suppose que les hypothèses (H 9.4.1)-(H 9.4.4) sont vérifiées. Si  $x \mapsto t_x$  et  $(x, t) \mapsto u(x, t)$  donné par (9.4.2) sont continues respectivement sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  et  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ , alors  $u$  est une solution de viscosité de (9.4.1) s'annulant sur  $\Gamma$ .*

**Preuve :** La preuve n'est pas très différentes du cas où l'opérateur hamiltonien  $H$  est continu (cf [31, 81, 32]). Mais notre preuve semble plus directe et plus naturelle que celles existant dans la littérature souvent basées sur la théorie du contrôle optimal.

Pour montrer que  $u$  est une solution de viscosité de (9.4.1), il suffit de montrer que  $u$  est à la fois sur et sous-solution (au sens solution de viscosité). On montre seulement que  $u$  est sous-solution (montrer que  $u$  est aussi une sur-solution se fait de manière analogue).

Soit donc  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ , et  $\Phi$  une fonction  $C^2$  tels que  $(x_0, t_0)$  soit un point de maximum local de  $(u - \Phi)(x, t)$ .

(i) premier cas : On commence par supposer que  $x_0 \in \Omega_+$  (le cas  $(x_0 \in \Omega_-)$  est identique).

Etape 1 : si  $t_0 \leq t_{x_0}$ , alors : Pour  $\epsilon < 1$  suffisamment petit, si  $h \leq \epsilon^2$  et  $|y| \leq \frac{1}{\epsilon}$  (avec  $h > 0$ ), on a :

$$u(x_0 - hy, t_0 - h) - \Phi(x_0 - hy, t_0 - h) \leq u(x_0, t_0) - \Phi(x_0, t_0) \quad (9.4.17)$$

On ajoute  $hH^*(y)$  à chaque membre de l'inégalité (9.4.17), et alors :

$$\begin{aligned} & u(x_0 - hy, t_0 - h) + hH^*(y) \\ \leq & u(x_0, t_0) + [\Phi(x_0 - hy, t_0 - h) - \Phi(x_0, t_0) + hH^*(y)] \end{aligned} \quad (9.4.18)$$

Cela implique

$$\begin{aligned} & \inf_{|y| \leq \frac{1}{\epsilon}} (u(x_0 - hy, t_0 - h) + hH^*(y)) \\ \leq & \inf_{|y| \leq \frac{1}{\epsilon}} (\Phi(x_0 - hy, t_0 - h) - \Phi(x_0, t_0) + hH^*(y)) + u(x_0, t_0) \end{aligned} \quad (9.4.19)$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} & \inf_{y \in \mathbb{R}^2} (u(x_0 - hy, t_0 - h) + hH^*(y)) \\ \leq & \inf_{|y| \leq \frac{1}{\epsilon}} (\Phi(x_0 - hy, t_0 - h) - \Phi(x_0, t_0) + hH^*(y)) + u(x_0, t_0) \end{aligned} \quad (9.4.20)$$

Mais d'après (9.4.2), on a (puisque  $t_{x_0} - h < t_{x_0 - hy}$  pour  $h$  suffisamment petit comme  $x \mapsto t_x$  est continu sur  $\Omega_+$ ) :

$$\begin{aligned} & \inf_{y \in \mathbb{R}^2} (u(x_0 - hy, t_0 - h) + hH^*(y)) \\ = & \inf_{y \in \mathbb{R}^2} \left( \inf_{z \in \mathbb{R}^2} (u_0(x_0 - hy - (t_0 - h)z) + hH^*(y) + (t_0 - h)H^*(z)) \right) \end{aligned}$$

Et donc, d'après le Lemme 9.4.1 :

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^2} (u(x_0 - hy, t_0 - h) + hH^*(y)) = \underbrace{\inf_{w \in \mathbb{R}^2} (u_0(x_0 - t_0 w) + t_0 H^*(w))}_{=u(x_0, t_0)} \quad (9.4.21)$$

D'où, en utilisant (9.4.20) :

$$\Phi(x_0, t_0) \leq \inf_{|y| \leq \frac{1}{\epsilon}} (\Phi(x_0 - hy, t_0 - h) + hH^*(y)) \quad (9.4.22)$$

Et ainsi

$$\Phi(x_0, t_0) - \Phi(x_0, t_0 - h) \leq \inf_{|y| \leq \frac{1}{\epsilon}} (\Phi(x_0 - hy, t_0 - h) - \Phi(x_0, t_0 - h) + hH^*(y)) \quad (9.4.23)$$

Mais

$$\Phi(x_0, t_0) - \Phi(x_0, t_0 - h) = h \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x_0, \tau(h)) \quad (9.4.24)$$

où  $\tau(h) \in [t_0 - h, t_0]$ . Et (on rappelle que  $D\Phi$  désigne les dérivées par rapport aux variables d'espace) :

$$\Phi(x_0 - hy, t_0 - h) - \Phi(x_0, t_0 - h) = -h(D\Phi(\xi(h, y), t_0 - h), y) \quad (9.4.25)$$

où  $\xi(h, y) = \lambda(x_0 - hy) + (1 - \lambda)x_0$  (avec  $\lambda \in [0, 1]$ ).

Donc

$$h \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x_0, \tau(h)) \leq \inf_{|y| \leq \frac{1}{\epsilon}} (-h(D\Phi(\xi(h, y), t_0 - h), y) + hH^*(y)) \quad (9.4.26)$$

D'où

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x_0, \tau(h)) \leq \inf_{|y| \leq \frac{1}{\epsilon}} (-(D\Phi(\xi(h, y), t_0 - h), y) + H^*(y)) \quad (9.4.27)$$

Si  $\epsilon \rightarrow 0$ , alors (comme  $h \leq \epsilon^2$  et  $|y| \leq \frac{1}{\epsilon}$ ) :

$$\tau(h) \rightarrow t_0 \quad (9.4.28)$$

et

$$\xi(h, y) \rightarrow x_0 \quad (9.4.29)$$

Donc

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x_0, t_0) \leq \inf_{y \in \mathbb{R}^2} (-(D\Phi(x_0, t_0), y) + H^*(y)) \quad (9.4.30)$$

Mais

$$\begin{aligned} \inf_y (-(D\Phi(x_0, t_0), y) + H^*(y)) &= -\sup_y ((D\Phi(x_0, t_0), y) - H^*(y)) \\ &= -H^{**}(D\Phi(x_0, t_0)) \\ &= -H(D\Phi(x_0, t_0)) \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x_0, t_0) \leq -H(D\Phi(x_0, t_0)) \quad (9.4.31)$$

et  $u$  est sous-solution de viscosité de (9.4.1).

Etape 2 : si  $t_0 > t_{x_0}$ , alors : On a  $\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) = 0$  ( $u$  est alors différentiable par rapport à la variable  $t$ ), et donc  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x_0, t_0) = 0$ . On veut montrer que

$$H(D\Phi(x_0, t_0)) \leq 0 \quad (9.4.32)$$

Pour simplifier les notations, nous n'écrivons plus la dépendance en  $t$  qui ici n'intervient pas.

Pour  $x$  suffisamment petit, on a :

$$h + u(x_0 + x) - \Phi(x_0 + x) \leq u(x_0) - \Phi(x_0) + h \quad (9.4.33)$$

$$\Leftrightarrow u(x_0 + x) + h \leq u(x_0) - \Phi(x_0) + \Phi(x_0 + x) + h \quad (9.4.34)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \underbrace{\inf_{L(x)=h} (u(x_0 + x) + h)}_{= u(x_0)} \leq u(x_0) - \Phi(x_0) + \inf_{L(x)=h} (\Phi(x_0 + x) + h) \\ & \text{d'après la Proposition 9.4.1} \\ & (u(x_0) = d_L(x_0, \Gamma)) \end{aligned} \quad (9.4.35)$$

D'où

$$\inf_{L(x)=h} (\Phi(x_0 + x) - \Phi(x_0)) \geq -h \quad (9.4.36)$$

Mais

$$\Phi(x_0 + x) - \Phi(x_0) = (D\Phi(x_0), x) + o(h) \quad (9.4.37)$$

Donc

$$\inf_{L(x)=h} (D\Phi(x_0), x) \geq -h + o(h) \quad (9.4.38)$$

On rappelle que :

$$L(x) = L(x, 0) = \sup_{\{H(p)=0\}} (x, p) \quad (9.4.39)$$

On peut ainsi réécrire (9.4.38) :

$$\sup_{L(x)=h} (D\Phi(x_0), x) \leq h + o(h) \quad (9.4.40)$$

On utilise alors (9.4.8) avec  $t = 0$  pour calculer  $L$  :

$$L(x) = \sup_{\{H(p)=0\}} (x, p) = \inf_{\{\lambda > 0\}} \left( \lambda H^* \left( \frac{x}{\lambda} \right) \right) \quad (9.4.41)$$

Et en utilisant (9.4.7), on obtient :

$$L(x) = \inf_{\{\lambda > 0\}} ((\lambda H)^*(x)) \quad (9.4.42)$$

Mais, d'après (9.4.8) avec  $t = h$

$$\sup_{\{L(x)=h\}} (x, v) = \inf_{\{\lambda > 0\}} \left( h\lambda + \lambda L^* \left( \frac{v}{\lambda} \right) \right) \quad (9.4.43)$$

et l'expression de  $L^*$  est :

$$L^* \left( \frac{v}{\lambda} \right) = \left( \inf_{\{\mu > 0\}} \left( (\mu H)^* \left( \frac{v}{\lambda} \right) \right) \right)^* \quad (9.4.44)$$

En utilisant ( 9.4.6), on a :

$$L^* \left( \frac{v}{\lambda} \right) = \sup_{\{\mu > 0\}} \left( (\mu H)^* \left( \frac{v}{\lambda} \right) \right)^* = \sup_{\{\mu > 0\}} \left( (\mu H)^{**} \left( \frac{v}{\lambda} \right) \right) \quad (9.4.45)$$

Mais  $H^{**} = H$ , et donc :

$$L^* \left( \frac{v}{\lambda} \right) = \sup_{\{\mu > 0\}} \left( \mu H \left( \frac{v}{\lambda} \right) \right) \quad (9.4.46)$$

D'où :

$$\sup_{\{L(x)=h\}} (x, v) = \inf_{\{\lambda > 0\}} \left( h\lambda + \lambda \left( \sup_{\{\mu > 0\}} \mu H \left( \frac{v}{\lambda} \right) \right) \right) \quad (9.4.47)$$

On pose :

$$G_h(v) = \sup_{\{L(x)=h\}} (x, v) \quad (9.4.48)$$

D'après (9.4.47), on a :

$$G_h(D\Phi(x_0)) \leq h + o(h) \quad (9.4.49)$$

On remarque que si  $H \left( \frac{v}{\lambda} \right) > 0$ , alors  $\sup_{\{\mu > 0\}} \mu H \left( \frac{v}{\lambda} \right) = +\infty$

Donc on peut réécrire (9.4.47) :

$$G_h(v) = \inf_{\{\lambda > 0 / H \left( \frac{v}{\lambda} \right) \leq 0\}} \left( h\lambda + \lambda \left( \sup_{\{\mu > 0\}} \mu H \left( \frac{v}{\lambda} \right) \right) \right) \quad (9.4.50)$$

Mais, si  $H \left( \frac{v}{\lambda} \right) \leq 0$ , on a  $\sup_{\{\mu > 0\}} \mu H \left( \frac{v}{\lambda} \right) = 0$  (il suffit de prendre  $\mu > 0$  arbitrairement proche de 0). Donc si  $\lambda > 0$ , on a  $\lambda h + \lambda \sup_{\{\mu > 0\}} \mu H \left( \frac{v}{\lambda} \right) = \lambda h$

Donc (9.4.50) implique que :

$$G_h(v) = \inf_{\{\lambda > 0 / H \left( \frac{v}{\lambda} \right) \leq 0\}} (\lambda h) \quad (9.4.51)$$

Et comme  $h > 0$ , on a :

$$G_h(v) = h \inf_{\{\lambda > 0 / H \left( \frac{v}{\lambda} \right) \leq 0\}} (\lambda) \quad (9.4.52)$$

Et en réinjectant  $G_h(v)$  dans (9.4.49), on obtient (comme  $h > 0$ ) :

$$\inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^* / H \left( \frac{D\Phi(x_0)}{\lambda} \right) \leq 0 \right\} \leq 1 + o(1) \quad (9.4.53)$$

Comme  $H$  est supposé convexe et  $H(0) < 0$ , on en déduit que :

$$H(D\Phi(x_0)) \leq 0 \quad (9.4.54)$$

ce qui signifie que  $u$  est une sous-solution de viscosité.

(ii) Second cas : Si  $x_0 \in \Omega_-$ , on a le même résultat (les calculs sont analogues).

(iii) Troisième cas : Si  $x_0 \in \Gamma$ . On utilise alors la définition des sous-solutions de viscosité pour un opérateur hamiltonien discontinu. On veut vérifier que :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x_0, t_0) + F_*(x_0, D\Phi(x_0, t_0)) \leq 0 \quad (9.4.55)$$

où

$$F(x, Du) = \text{signe}(u_0(x))H(Du) \quad (9.4.56)$$

Mais dans ce cas, on a  $\forall t \geq 0$  :

$$u(x_0, t) = 0 \quad (9.4.57)$$

et donc

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t) = 0 \quad (9.4.58)$$

Il suffit donc de vérifier que :

$$F_*(x_0, D\Phi(x_0, t_0)) \leq 0 \quad (9.4.59)$$

Mais

$$F_*(x_0, D\Phi(x_0, t_0)) = \min(0, H(D\Phi(x_0, t_0)), -H(D\Phi(x_0, t_0))) \quad (9.4.60)$$

Et on a donc (9.4.59). ■

Remarque : En fait, dans la preuve de la Proposition 9.4.2, on a montré en plus le résultat suivant :

**Corollaire 9.4.1.** *On suppose que (H 9.4.3)-(H 9.4.4) sont vérifiées. Alors  $u : x \mapsto d_L(x, \Gamma)$  est une solution de viscosité dans  $\Omega_+ = \{x/u_0(x) > 0\}$  de l'équation stationnaire  $H(Du) = 0$ .*

## (ii) Unicité

On regarde ici l'unicité d'une solution de (9.4.1).

**Proposition 9.4.3.** *On suppose que les hypothèses (H 9.4.1)-(H 9.4.4) sont vérifiées. Alors (9.4.1) possède au plus une seule solution de viscosité qui soit uniformément continue sur  $\mathbb{R}^2 \times [0, T]$ ,  $\forall T > 0$  et qui s'annule sur  $\Gamma$ .*

**Preuve :** La preuve est identique à celle de la partie unicité du Théorème 9.3.1. Elle repose sur un théorème dû à Ishii (cf [98]). ■

## 9.4.3 Existence de $t_x$ et continuité de $u(x, t)$

Pour montrer complètement que  $u(x, t)$  donné par (9.4.2) est une solution de viscosité de (9.4.1), il reste à prouver que  $u(x, t)$  est continue. C'est le point le plus difficile (à cause de la discontinuité de l'opérateur hamiltonien de (9.4.1)).

## Hypothèses supplémentaires

Comme nous l'avons expliqué précédemment, quelques hypothèses complémentaires sur  $u_0$  sont nécessaires avant d'aller plus loin. Dorénavant, nous supposons toujours que *l'une des deux* hypothèses suivantes est vérifiée.

(H9.4.5)

$$\begin{cases} |u_0(x)| \leq d_L(x, \Gamma) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \\ u_0 \text{ est bornée dans } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (9.4.61)$$

(H9.4.6)

$$|u_0(x)| \geq d_L(x, \Gamma) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad (9.4.62)$$

On renvoie le lecteur à la fin de la Section 9.4.3 pour examiner sur un exemple le cas où aucune de ces deux hypothèses n'est vérifiée.

**Remarque :** Ces deux hypothèses ne peuvent évidemment pas être vérifiées simultanément. Il nous faudra distinguer les deux cas dans les preuves.

On définit  $v : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$  par :

$$v(x, t) = \begin{cases} u_0(x) & \text{si } x \in \Gamma \\ \inf_{z \in \mathbb{R}^2} [u_0(x - tz) + tH^*(z)] & \text{si } x \in \Omega_+ \\ \sup_{z \in \mathbb{R}^2} [u_0(x - tz) - tH^*(z)] & \text{si } x \in \Omega_- \end{cases} \quad (9.4.63)$$

et  $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$  par :

$$f(x, t) = v(x, t) - \epsilon_x d_L(x, \Gamma) \quad (9.4.64)$$

$$\text{où } \epsilon_x = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_+ \\ -1 & \text{si } x \in \Omega_- \end{cases}$$

$v(x, t)$  coïncide avec  $u(x, t)$  lorsque  $t \leq t_x$ . On étudie  $t_x$  à travers les zéros de  $f$ .

Le temps  $t_x$  défini par (9.4.3) est tel que  $v(x, t_x) = \epsilon_x d_L(x, \Gamma)$ , i.e.  $f(x, t_x) = 0$ . On peut remarquer que l'hypothèse (H 9.4.5) (resp. (H 9.4.6)) implique  $f(x, t) \leq 0$  pour tout  $t \in [0, t_x]$  (resp.  $f(x, t) \geq 0$ ) puisque  $f(x, 0) = u_0(x) - d_L(x, \Gamma) \leq 0$  (resp.  $f(x, 0) \geq 0$ ). Il nous faudra supposer plus sur la nature de ce zéro. Suivant que l'hypothèse (H 9.4.5) ou l'hypothèse (H 9.4.6) sera vérifiée, on utilisera l'une des deux hypothèses suivantes :

(H9.4.7) Pour tout  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , il existe  $\beta_x > 0$  tel que :

$$\begin{cases} f(x, t) \leq 0 & \forall t \in [0, t_x] \\ f(x, t) > 0 & \forall t \in ]t_x, t_x + \beta_x] \end{cases} \quad (9.4.65)$$

(H9.4.8) Pour tout  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , il existe  $\beta_x > 0$  tel que :

$$\begin{cases} f(x, t) \geq 0 & \forall t \in [0, t_x] \\ f(x, t) < 0 & \forall t \in ]t_x, t_x + \beta_x] \end{cases} \quad (9.4.66)$$

On utilisera aussi les hypothèses suivantes :

(H9.4.9)  $u_0$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

(H9.4.10)

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^2} (H^*(x) - |x| \|\nabla u_0\|_\infty) > 0 \quad (9.4.67)$$

où  $\|\nabla u_0\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |\nabla u_0(x)|$ .

Il faut remarquer que lorsque  $H$  est radiale, (H 9.4.10) est équivalente à :

$$H(\|\nabla u_0\|_\infty) < \infty \quad (9.4.68)$$

(H9.4.11)  $H^*$  est radiale et  $H^{*''}(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Ces deux dernières hypothèses ne sont pas vides. Par exemple, il suffit de considérer l'opérateur hamiltonien  $H(t) = t^2 - 1$ . Il vérifie (H 9.4.11). Et si  $u_0$  est tel que  $\|\nabla u_0\|_\infty < 1$ , alors  $H$  et  $u_0$  vérifie (H 9.4.10).

En plus des hypothèses (H 9.4.1)-(H 9.4.4), nous supposons également que (H 9.4.5) ou (H 9.4.6) est vérifié.

### (i) Continuité de $u(x, t)$ sous l'hypothèse (H 9.4.5)

On commence par vérifier que  $t_x$  donné par (9.4.3) existe.

**Lemme 9.4.2.** *On suppose que les hypothèses (H 9.4.1)-(H 9.4.5) sont vérifiées. Alors pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $t_x$  existe et est fini. De plus,*

$$t_x \leq \frac{d_L(x, \Gamma) + \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |u_0(x)|}{-H(0)} \quad (9.4.69)$$

**Preuve :** Comme  $u_0$  est supposé borné, il existe  $M > 0$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}^2, |u_0(x)| \leq M$ . De plus, comme  $v$  (définie par (9.4.63)) est uniformément continue sur  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  (cf [32]),  $f$  (définie par (9.4.64)) est aussi uniformément continue sur  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$ .

On fixe  $x \in \Omega_+$  (le cas  $x \in \Omega_-$  est similaire). D'après (H 9.4.5), on a  $u(x, 0) = u_0(x) \leq d_L(x, \Gamma)$ , i.e.  $f(x, 0) \leq 0$ . D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \inf_z (u_0(x - tz) + tH^*(z)) \\ &\geq -M + t \inf_z H^*(z) \end{aligned} \quad (9.4.70)$$

Comme  $H(0) < 0$ , on a pour tout  $z \in \mathbb{R}^2$  :

$$H^*(z) \geq -H(0) > 0 \quad (9.4.71)$$

Donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = +\infty \quad (9.4.72)$$

Et alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(x, t) = +\infty \quad (9.4.73)$$

Et on conclut grâce au théorème des valeurs intermédiaires que  $t_x$  existe et est fini (on rappelle que par définition  $f(x, t_x) = 0$ ). (9.4.69) est une conséquence immédiate de (9.4.70) et (9.4.71).



Le lemme suivant donne le comportement de  $u(x, t)$  au voisinage de  $\Gamma$ .

**Lemme 9.4.3.** *On suppose que les hypothèses (H 9.4.1)-(H 9.4.5) sont vérifiées.*

- si  $x \in \Omega_+$ , alors pour tout  $t \geq 0$  on a :

$$0 \leq u(x, t) \leq d_L(x, \Gamma) \quad (9.4.74)$$

- si  $x \in \Omega_-$ , alors pour tout  $t \geq 0$  on a :

$$-d_L(x, \Gamma) \leq u(x, t) \leq 0 \quad (9.4.75)$$

En particulier, on a pour tout  $t \geq 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow \Gamma} u(x, t) = 0 \quad (9.4.76)$$

ce qui signifie que  $u(x, t)$  est continue sur  $\Gamma \times \mathbb{R}_+$ .

**Preuve :** On montre simplement le premier point du lemme. Soit  $x \in \Omega_+$ , comme  $u(x, 0) = u_0(x) \leq d_L(x, \Gamma)$ , on a d'après (9.4.3) et (H 9.4.5),  $f(x, t) \leq 0$  si  $t \leq t_x$ , et d'après (9.4.2),  $u(x, t) = d_L(x, \Gamma)$  si  $t \geq t_x$ . Donc, pour tout  $t \geq 0$  :

$$u(x, t) \leq d_L(x, \Gamma) \quad (9.4.77)$$

D'autre part (on rappelle que d'après (9.4.8) on a  $\forall t > 0$  et  $\forall y \in \mathbb{R} \ tH^*\left(\frac{y}{t}\right) \geq L(y)$ ), donc pour tout  $t \leq t_x$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \inf_y \left( u_0(x - y) + tH^*\left(\frac{y}{t}\right) \right) \\ &\geq \inf \left( \inf_{y/u_0(x-y) \geq 0} \left( \underbrace{u_0(x - y)}_{\geq 0} + \underbrace{tH^*\left(\frac{y}{t}\right)}_{\geq L(y)} \right), \inf_{y/u_0(x-y) < 0} \left( \underbrace{u_0(x - y)}_{\geq -d_L(x-y, \Gamma)} + \underbrace{tH^*\left(\frac{y}{t}\right)}_{\geq L(y)} \right) \right) \\ &\geq \inf \left( \inf_{y/u_0(x-y) \geq 0} L(y), \inf_{y/u_0(x-y) < 0} (-d_L(x - y, \Gamma) + L(y)) \right) \\ &\geq \inf \left( 0, \inf_{y/u_0(x-y) < 0} (-d_L(x - y, \Gamma) + L(y)) \right) \end{aligned}$$

Mais si  $u_0(x - y) < 0$ , alors il existe  $z$  sur le segment  $[x, x - y]$  tel que  $u_0(z) = 0$ . De plus,  $z$  s'écrit aussi :  $z = (1 - \lambda)x + \lambda(x - y) = x - \lambda y$  pour un certain  $\lambda \in [0, 1]$ .

Comme  $d_L(x - y, \Gamma)$  désigne la  $L$  distance de  $x - y$  à  $\Gamma$ , et puisque  $z \in \Gamma$ , on a :

$$d_L(x - y, \Gamma) \leq L(x - y - z) = (1 - \lambda)L(y) \quad (9.4.78)$$

On obtient ainsi :

$$u(x, t) \geq 0 \quad (9.4.79)$$

D'où le lemme. ■

La principale difficulté pour montrer que  $u(x, t)$  définie par (9.4.2) est continue est de prouver que  $x \mapsto t_x$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ .

Nous aurons besoin de l'hypothèse (H 9.4.7) pour aller plus loin.

**Lemme 9.4.4.** *On suppose que les hypothèses (H 9.4.1)-(H 9.4.5) sont vérifiées. Si l'hypothèse (H 9.4.7) est vérifiée aussi, alors la fonction  $x \mapsto t_x$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ .*

**Preuve :** Soit  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Soit  $(x_n)$  une suite de points dans  $\mathbb{R}^2$  tels que  $x_n \rightarrow x$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . On veut montrer que  $t_{x_n} \rightarrow t_x$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Comme  $(x_n)$  est bornée dans  $\mathbb{R}^2$  (car elle converge vers  $x$ ), il en est de même pour  $t_{x_n}$  (d'après (9.4.69)). Il existe donc  $\xi_x \in \mathbb{R}^2$  tel que (à une extraction près) :  $t_{x_n} \rightarrow \xi_x$ . D'après l'hypothèse (H 9.4.7), il existe  $\beta_x > 0$  tel que :

$$f(x, t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, t_x] \quad (9.4.80)$$

$$f(x, t) > 0 \quad \forall t \in ]t_x, t_x + \beta_x] \quad (9.4.81)$$

On remarque alors que (9.4.80) se réécrit :

$$f(x, t) (t_x - t)_+ \leq 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+ \quad (9.4.82)$$

où  $(y)_+ = \max(y, 0)$ .

On a aussi ( $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ) :

$$f(x_n, t) (t_{x_n} - t)_+ \leq 0 \quad (9.4.83)$$

Et donc, en passant à la limite, on obtient (pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}_+$ ) :

$$f(x, t) (\xi_x - t)_+ \leq 0 \quad (9.4.84)$$

Par l'absurde, on suppose que  $\xi_x > t_x$ . En réduisant (si nécessaire)  $\beta_x$ , on peut supposer que  $\xi_x > t_x + \beta_x$ . Alors, pour tout  $t$  dans  $]t_x, t_x + \beta_x[$ , on obtient d'après (9.4.84)  $f(x, t) \leq 0$ . Cela contredit (9.4.81). On en déduit donc que :

$$\xi_x \leq t_x \quad (9.4.85)$$

Mais par définition de  $t_{x_n}$ , on a  $f(x_n, t_{x_n}) = 0$ . En passant à la limite, on obtient ainsi

$$f(x, \xi_x) = 0 \quad (9.4.86)$$

D'où, comme  $t_x$  est le premier zéro de  $f(x, t)$  (par définition), on obtient :

$$t_x \leq \xi_x \quad (9.4.87)$$

D'où

$$t_x = \xi_x \quad (9.4.88)$$

On en déduit que  $t_{x_n}$  possède une unique valeur d'adhérence  $t_x$ , et toute la suite  $(t_{x_n})$  converge vers  $t_x$ . On conclut que  $x \mapsto t_x$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . ■

Nous sommes maintenant à même de prouver la continuité de  $u(x, t)$  définie par (9.4.2).

**Proposition 9.4.4.** *On suppose que (H 9.4.1)-(H 9.4.5) sont vérifiées. Si (H 9.4.7) est vérifiée, alors la fonction  $u(x, t)$  définie par (9.4.2) est continue sur  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ .*

**Preuve :** On commence par rappeler que d'après [32], la fonction  $v$  définie par (9.4.63) est uniformément continue sur  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  (car (H 9.4.3) est vérifiée). Soit  $(x, \hat{x}, t, \hat{t})$  dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ . On peut supposer que  $t_x \leq t_{\hat{x}}$ .

Premier cas : On commence par montrer que  $u$  est continue sur  $\Omega_+ \times \mathbb{R}_+$  (le cas  $\Omega_- \times \mathbb{R}_+$  est similaire). On suppose que  $x$  et  $\hat{x}$  sont dans  $\Omega_+$ .

Etape 1 : si  $t \leq t_x$  et  $\hat{t} \leq t_{\hat{x}}$ , alors :

$$u(x, t) - u(\hat{x}, \hat{t}) = v(x, t) - v(\hat{x}, \hat{t}) \quad (9.4.89)$$

Et puisque  $v$  est uniformément continue,  $u$  est continue.

Etape 2 : si  $t \geq t_x$  et  $\hat{t} \geq t_{\hat{x}}$ , alors :

$$u(x, t) - u(\hat{x}, \hat{t}) = d_L(x, \Gamma) - d_L(\hat{x}, \Gamma) \quad (9.4.90)$$

Et puisque  $d_L$  est continue, il en est de même pour  $u$ .

Etape 3 : si  $t_x < t < t_{\hat{x}}$ , alors on peut écrire (car  $u(x, t_x) = v(x, t_x)$  et  $v(\hat{x}, t_{\hat{x}}) = u(\hat{x}, t_{\hat{x}})$ ) :

$$u(x, t) - u(\hat{x}, \hat{t}) = u(x, t) - u(x, t_x) + v(x, t_x) - v(\hat{x}, t_{\hat{x}}) + u(\hat{x}, t_{\hat{x}}) - u(\hat{x}, \hat{t}) \quad (9.4.91)$$

D'après le Lemme 9.4.4, on sait que l'application  $y \mapsto t_y$  est continue sur  $\Omega_+$ ; elle est donc continue en  $x$  : on a  $t_{\hat{x}} \rightarrow t_x$  lorsque  $\hat{x} \rightarrow x$ . Comme on considère le cas où  $t_x < t < t_{\hat{x}}$ , on a  $t \rightarrow t_x$  dans (9.4.91) lorsque  $\hat{x} \rightarrow x$ . Soit  $\epsilon > 0$ . Pour  $|x - \hat{x}|$  suffisamment petit, on a  $u(x, t) - u(x, t_x) \leq \frac{\epsilon}{3}$  (puisque  $u(x, \cdot)$  est continue) et  $v(x, t_x) - v(\hat{x}, t_{\hat{x}}) \leq \frac{\epsilon}{3}$ , et pour  $|t - \hat{t}|$  suffisamment petit, on a  $u(\hat{x}, t_{\hat{x}}) - u(\hat{x}, \hat{t}) \leq \frac{\epsilon}{3}$ .

Et on en déduit que  $u(x, t)$  est continue sur  $\Omega_+ \times \mathbb{R}_+$ .

Second cas : Il reste à montrer que  $u$  est continue sur  $\mathcal{V} \times \mathbb{R}_+$  (où  $\mathcal{V}$  est un voisinage ouvert de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}^2$ ). Mais c'est une conséquence du Lemme 9.4.3 où on a étudié le comportement de  $u(x, t)$  pour  $x$  proche de  $\Gamma$ .

■

On montre alors que  $u(x, t)$  est en fait uniformément continue.

**Proposition 9.4.5.** *On suppose que les hypothèses (H 9.4.1)-(H 9.4.5) et (H 9.4.7) sont vérifiées. Alors la fonction  $u(x, t)$  définie par (9.4.2) est uniformément continue sur  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ .*

**Preuve :** D'après la Proposition 9.4.4, on sait que  $u$  est continue. De plus

$$|u(x, t)| \leq \max(|v(x, t)|, d_L(x, \Gamma)) \quad (9.4.92)$$

Rappelons qu'une fonction uniformément continue est au plus à croissance linéaire à l'infini (cf [65, 66]). Comme  $v$  et  $d_L$  sont uniformément continue, on en déduit que  $u$  est au plus à croissance linéaire à l'infini, i.e. qu'il existe  $C > 0$  tel que :

$$u(x, t) \leq C(|x| + |t| + 1) \quad (9.4.93)$$

Comme  $u$  est une solution de viscosité continue, on déduit de [65, 66] que  $u$  est en fait uniformément continue.

Le résultat principal de ce chapitre est une conséquence des Propositions 9.4.2, 9.4.3 et 9.4.5 :

**Théorème 9.4.1.** *On suppose que les hypothèses (H 9.4.1)-(H 9.4.5) et (H 9.4.7) sont vérifiées. Alors la fonction  $u(x, t)$  définie par (9.4.2) est solution de viscosité de (9.4.1). De plus, elle est unique dans la classe des solutions de viscosité uniformément continue sur  $\mathbb{R}^2 \times [0, T]$ ,  $\forall T > 0$  et s'annulant sur  $\Gamma$ .*

Une question naturelle est de savoir quand l'hypothèse (H 9.4.7), qui est assez technique, est vérifiée.

**Proposition 9.4.6.** *On suppose que les hypothèses (H 9.4.1)-(H 9.4.5) sont vérifiées. Si  $u_0$  et  $H$  satisfont (H 9.4.9) et (H 9.4.10), alors  $v$  définie par (9.4.63) est telle que  $\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  et pour tout  $t \geq 0$ . Donc (H 9.4.7) est vérifiée.*

**Preuve :** Soit  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . On suppose  $x \in \Omega_+$  (le cas  $x \in \Omega_-$  est similaire). D'après (9.4.63), on a donc :

$$v(x, t) = \inf_y (u_0(x - ty) + tH^*(y)) \quad (9.4.94)$$

On note  $S(x, t) = \{y(x, t)/v(x, t) = u_0(x - ty(x, t)) + tH^*(y(x, t))\}$ .  $S(x, t)$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$ . On obtient donc (cf [109]) :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \inf_{y \in S(x, t)} (y \cdot \nabla u_0(x - ty) + H^*(y)) \quad (9.4.95)$$

D'où

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) \geq \inf_{y \in \mathbb{R}^2} (y \cdot \nabla u_0(x - ty) + H^*(y)) \quad (9.4.96)$$

Donc, d'après (H 9.4.10)

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) > 0 \quad (9.4.97)$$

Comme conséquence immédiate du Théorème 9.4.1 et de la Proposition 9.4.6, on a :

**Corollaire 9.4.2.** *On suppose que les hypothèses (H 9.4.1)-(H 9.4.5), (H 9.4.9) et (H 9.4.10) sont vérifiées. Alors la fonction  $u(x, t)$  définie par (9.4.2) est solution de viscosité de (9.4.1). De plus, elle est unique dans la classe des solutions de viscosité uniformément continue sur  $\mathbb{R}^2 \times [0, T]$ ,  $\forall T > 0$  et s'annulant sur  $\Gamma$ .*

Par définition,  $t_x$  est un zéro de la fonction  $t \mapsto f(x, t)$ . Dans la preuve du Lemme 9.4.4, le graphe de  $f(x, \cdot)$  en  $t_x$  ne peut pas avoir l'allure des Graphes 2 ou 3 de la Figure 9.6. L'hypothèse (H 9.4.10) assure qu'en  $t_x$  le graphe de  $f(x, \cdot)$  est du genre du Graphe 1 de la Figure 9.6. La proposition suivante donne une condition suffisante sur  $H$  sous laquelle le graphe de  $f(x, \cdot)$  ne peut pas être du type de celui du Graphe 2 de la Figure 9.6 (mais il peut cependant être du genre du Graphe 3).

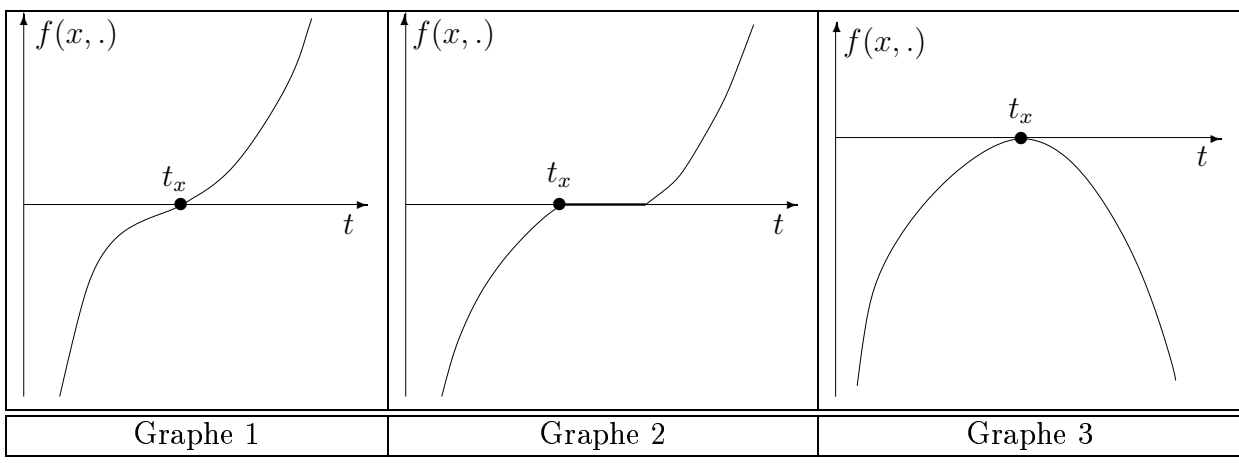


FIG. 9.6 – Nature des zéros de  $t \mapsto f(x, t)$

**Proposition 9.4.7.** *On suppose que les hypothèses (H 9.4.1)-(H 9.4.5) et (H 9.4.9) sont vérifiées. Si  $H$  satisfait (H 9.4.11) et si  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , alors les zéros de  $t \mapsto f(x, t)$  sont isolés ( $f$  est définie par (9.4.64)).*

**Preuve :** Soit  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . On suppose  $x \in \Omega_+$  (le cas  $x \in \Omega_-$  est similaire). On rappelle la définition de  $f$  (donnée par (9.4.64) quand  $x \in \Omega_+$  :

$$f(x, t) = v(x, t) - d(x, \Gamma) \quad (9.4.98)$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) \quad (9.4.99)$$

Par l'absurde, on suppose qu'il existe  $\alpha_x > 0$  tel que  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = 0$  sur  $[t_x, t_x + \alpha_x]$ , i.e.  $[t_x, t_x + \alpha_x]$  :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) \equiv 0 \quad (9.4.100)$$

Comme  $H^*$  est radiale, on a

$$v(x, t) = \inf_y (u_0(x + ty) + tH^*(|y|)) \quad (9.4.101)$$

On note  $S(x, t) = \{y(x, t)/v(x, t) = u_0(x + ty(x, t)) + tH^*(|y(x, t)|)\}$ .  $S(x, t)$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$ . On obtient donc :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \inf_{y \in S(x, t)} (y \cdot \nabla u_0(x + ty) + H^*(|y|)) \quad (9.4.102)$$

Mais pour tout  $y \in S(x, t)$ , on a :

$$t \nabla u_0(x + ty) + t \frac{y}{|y|} H^{*'}(|y|) = 0 \quad (9.4.103)$$

Comme  $x$  n'appartient pas à  $\Gamma$ , on a (d'après l'hypothèse (H 9.4.11))  $t_x > 0$ . Si  $t \neq 0$ , on déduit de (9.4.103) que :

$$y \cdot \nabla u_0(x + ty) = -|y| H^{*'}(|y|) \quad (9.4.104)$$

D'où

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \inf_{y \in S(x, t)} \left( -|y|H^{*'}(|y|) + H^*(|y|) \right) \quad (9.4.105)$$

Soit  $(t_1, t_2)$  dans  $[t_x, t_x + \alpha_x]^2$  (avec  $t_1 \neq t_2$ ). On a :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t_1) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, t_2) = 0 \quad (9.4.106)$$

On pose  $y_1 \in S(x, t_1)$  et  $y_2 \in S(x, t_2)$  ( $y_1$  et  $y_2 \neq 0$ ). On a donc :

$$-|y_1|H^{*'}(|y_1|) + H^*(|y_1|) = 0 \quad (9.4.107)$$

$$-|y_2|H^{*'}(|y_2|) + H^*(|y_2|) = 0 \quad (9.4.108)$$

En retranchant (9.4.107) à (9.4.108), on obtient :

$$H^*(|y_1|) - H^*(|y_2|) - |y_1|H^{*'}(|y_1|) + |y_2|H^{*'}(|y_2|) = 0 \quad (9.4.109)$$

On a aussi :

$$H^*(|y_2|) - H^*(|y_1|) - |y_2|H^{*'}(|y_2|) + |y_1|H^{*'}(|y_1|) = 0 \quad (9.4.110)$$

Comme  $H^*$  est strictement convexe sur  $\mathbb{R}$  (d'après l'hypothèse (H 9.4.11)), et puisque  $H$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , on a (si  $y_1 \neq y_2$ ) :

$$H^*(|y_1|) - H^*(|y_2|) > (|y_1| - |y_2|)H^{*'}(|y_2|) \quad (9.4.111)$$

$$H^*(|y_2|) - H^*(|y_1|) > (|y_2| - |y_1|)H^{*'}(|y_1|) \quad (9.4.112)$$

D'après (9.4.109) et (9.4.111), on obtient :

$$(|y_1| - |y_2|)H^{*'}(|y_2|) - |y_1|H^{*'}(|y_1|) + |y_2|H^{*'}(|y_2|) < 0 \quad (9.4.113)$$

i.e.

$$|y_1| \left( H^{*'}(|y_2|) - H^{*'}(|y_1|) \right) < 0 \quad (9.4.114)$$

D'où :

$$H^{*'}(|y_2|) - H^{*'}(|y_1|) < 0 \quad (9.4.115)$$

Mais d'après (9.4.110) et (9.4.112), on a :

$$(|y_2| - |y_1|)H^{*'}(|y_1|) - |y_2|H^{*'}(|y_2|) + |y_1|H^{*'}(|y_1|) < 0 \quad (9.4.116)$$

i.e.

$$|y_2| \left( H^{*'}(|y_1|) - H^{*'}(|y_2|) \right) < 0 \quad (9.4.117)$$

D'où :

$$H^{*'}(|y_1|) - H^{*'}(|y_2|) < 0 \quad (9.4.118)$$

Mais (9.4.115) et (9.4.118) sont contradictoires. On conclut donc qu'on ne peut pas avoir simultanément  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = 0$  sur  $[t_x, t_x + \alpha_x]$  et l'existence de deux points distincts  $t_1$  et  $t_2$  tels que

$$S(x, t_1) \neq S(x, t_2) \quad (9.4.119)$$

Comme on a supposé (par l'absurde) que  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = 0$  sur  $[t_x, t_x + \alpha_x]$ , cela signifie que  $S(x, t)$  est le même ensemble pour tout  $t \in [t_x, t_x + \alpha_x]$ . Il existe donc  $y_0 = y_0(x) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\forall t \in [t_x, t_x + \alpha_x]$  :

$$-|y_0|H^{*'}(|y_0|) + H^*(|y_0|) = \inf_{y \in S(x, t)} \left( -|y|H^{*'}(|y|) + H^*(|y|) \right) \quad (9.4.120)$$

Pour un tel  $y_0$ , on a

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \inf_{|y|=|y_0|} (u_0(x + ty) + tH^*(|y|)) \\ &= \inf_{|y|=|y_0|} (u_0(x + ty) + tH^*(|y_0|)) \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai  $\forall t \in [t_x, t_x + \alpha_x]$ , on doit avoir

$$0 = \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = H^* \left( \frac{|y_0|}{t} \right) - \frac{|y_0|}{t} H^{*'} \left( \frac{|y_0|}{t} \right) \quad (9.4.121)$$

En dérivant à nouveau par rapport à  $t$ , on obtient :

$$-\frac{|y_0|}{t^2} H^{*'} \left( \frac{|y_0|}{t} \right) + \frac{|y_0|}{t^2} H^{*'} \left( \frac{|y_0|}{t} \right) + \frac{|y_0|}{t^3} H^{*''} \left( \frac{|y_0|}{t} \right) = 0 \quad (9.4.122)$$

i.e.

$$\frac{|y_0|}{t^3} H^{*''} \left( \frac{|y_0|}{t} \right) = 0 \quad (9.4.123)$$

Premier cas : si  $|y_0| \neq 0$ , on déduit alors que :

$$H^{*''} \left( \frac{|y_0|}{t} \right) = 0 \quad (9.4.124)$$

et on obtient une contradiction avec (H 9.4.11).

Second cas : si  $|y_0| = 0$ , i.e.  $y_0 = 0$ , alors :

$$v(x, t) = u_0(x) + tH^*(0) \quad (9.4.125)$$

et

$$0 = \frac{\partial v}{\partial t} = H^*(0) \quad (9.4.126)$$

Mais on a une contradiction avec (H 9.4.4) (on a supposé  $H(0) < 0$  et donc  $H^*(0) > 0$ ).

■

On peut légèrement affaiblir (H 9.4.10) en considérant une inégalité large, mais en faisant une hypothèse supplémentaire sur  $H$ .

(H9.4.12)

$$\begin{cases} H(\|\nabla u_0\|_\infty) \leq 0 \\ H \text{ radiale} \\ H^{*''}(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (9.4.127)$$

Remarque : Si  $H$  vérifie (H 9.4.11) et si  $u_0$  est la solution de viscosité de  $H(\nabla u) = 0$ , alors (H 9.4.12) est vérifiée.

Comme conséquence immédiate du Théorème 9.4.1 et des Propositions 9.4.6 et 9.4.7, on a :

**Corollaire 9.4.3.** *On suppose que les hypothèses (H 9.4.1)-(H 9.4.5), (H 9.4.9) et (H 9.4.12) sont vérifiées. Alors la fonction  $u(x, t)$  définie par (9.4.2) est solution de viscosité de (9.4.1). De plus, elle est unique dans la classe des solutions de viscosité uniformément continue sur  $\mathbb{R}^2 \times [0, T]$ ,  $\forall T > 0$  et s'annulant sur  $\Gamma$ .*

## (ii) Existence de $t_x$ et continuité de $u(x, t)$ sous l'hypothèse (H 9.4.6)

On considère maintenant le cas où l'hypothèse (H 9.4.6) est vérifiée.

Pour  $x \in \mathbb{R}^2$ , soit  $\hat{y}_x$  la projection de  $x$  sur  $\Gamma$  au sens de la  $L$ -distance (dans le cas où la projection n'est pas unique, on choisit arbitrairement l'un des projetés de  $x$  comme étant  $\hat{y}_x$ ), et  $y_x = x - \hat{y}_x$  (donc  $L(y_x) = d_L(x, \Gamma)$ ). On introduit alors un temps auxiliaire  $t'_x$  définie par :

$$t'_x = \inf \left\{ t > 0 / \inf_{t > 0} \left( t H^* \left( \frac{y_x}{t} \right) \right) = d_L(x, \Gamma) \right\} \quad (9.4.128)$$

On a l'inégalité suivante :

**Lemme 9.4.5.** *On suppose que (H 9.4.1)-(H 9.4.4) sont vérifiées. Alors pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^2$ , on a*

$$t'_x \leq \frac{2d_L(x, \Gamma)}{H^*(0)} \quad (9.4.129)$$

et

$$|u(x, t'_x)| \leq d_L(x, \Gamma) \quad (9.4.130)$$

**Preuve :** On coupe la preuve en deux parties.

Partie 1 : On commence par montrer (9.4.129). On rappelle que, comme  $H$  est convexe, on a d'après (9.4.8)

$$L(y) = \inf_{t > 0} t H^* \left( \frac{y}{t} \right) \quad (9.4.131)$$

Soit maintenant  $A > 0$ . Comme  $\lim_{|p| \rightarrow +\infty} \frac{H^*(p)}{|p|} = +\infty$ , il existe  $T > 0$  tel que  $\forall t \leq T$  on a :

$$\frac{H^* \left( \frac{y_x}{t} \right)}{\frac{|y_x|}{t}} \geq A \quad (9.4.132)$$

i.e.

$$t H^* \left( \frac{y_x}{t} \right) \geq A |y_x| \quad (9.4.133)$$

ce qui implique

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t H^* \left( \frac{y_x}{t} \right) = +\infty \quad (9.4.134)$$

et donc  $t'_x > 0$ .

De plus, lorsque  $t \rightarrow +\infty$  :

$$t H^* \left( \frac{y_x}{t} \right) \sim t H^*(0) \quad (9.4.135)$$



Donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} tH^*\left(\frac{y_x}{t}\right) = +\infty \quad (9.4.136)$$

et  $t'_x < +\infty$ . Donnons une borne plus précise pour  $t'_x$ . Comme  $H^*(0) > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $|y| \leq \delta$  implique  $H^*(y) \geq \frac{H^*(0)}{2}$ . De plus, il existe  $T > 0$  tel que  $t \geq T \Rightarrow \frac{y_x}{t} \leq \delta$ . Donc, si  $t \geq T$ , alors

$$tH^*\left(\frac{y_x}{t}\right) \geq t \frac{H^*(0)}{2} \quad (9.4.137)$$

D'où

$$t'_x \leq \frac{2d_L(x, \Gamma)}{H^*(0)} \quad (9.4.138)$$

Partie 2 : On montre maintenant (9.4.130). Le résultat est évident si  $x$  est sur  $\Gamma$ . On regarde maintenant le cas où  $x$  se trouve en dehors de  $\Gamma$ . On rappelle que :

$$u(x, t) \leq \max(v(x, t), d_L(x, \Gamma)) \quad (9.4.139)$$

(où  $v$  est définie par (9.4.63)).

On veut calculer  $v(x, t'_x)$ . On suppose par exemple que  $x$  se trouve dans  $\Omega_+$  (le cas où  $x$  est dans  $\Omega_-$  est similaire). on a :

$$\begin{aligned} v(x, t'_x) &= \inf_{y \in \mathbb{R}^2} \left[ u_0(x - y) + t'_x H^*\left(\frac{y}{t'_x}\right) \right] \\ &\leq u_0(x - y_x) + t'_x H^*\left(\frac{y_x}{t'_x}\right) \end{aligned}$$

Mais par définition

$$u_0(x - y_x) = 0 \quad (9.4.140)$$

et

$$L(y_x) = t'_x H^*\left(\frac{y_x}{t'_x}\right) = d_L(x, \Gamma) \quad (9.4.141)$$

Donc

$$v(x, t'_x) \leq d_L(x, \Gamma) \quad (9.4.142)$$

D'où on conclut d'après (9.4.139) que (9.4.130) est vérifiée. ■

**Lemme 9.4.6.** *On suppose que les hypothèses (H 9.4.1)-(H 9.4.4) et (H 9.4.6) sont vérifiées. Alors :*

$$t_x \leq \frac{2d_L(x, \Gamma)}{H^*(0)} \quad (9.4.143)$$

**Preuve :** On suppose que  $x \in \Omega_+$  (le cas  $x \in \Omega_-$  est similaire). Alors d'après l'hypothèse (H 9.4.6) on a  $u(x, 0) = u_0(x) \geq d_L(x, \Gamma)$ . Le Lemme 9.4.5 nous dit que  $u(x, t'_x) \leq d_L(x, \Gamma)$ . Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (on rappelle que  $u(x, t_x) = d_L(x, \Gamma)$ ), on déduit que nécessairement  $t_x \leq t'_x$ . Et on conclut grâce au Lemme 9.4.5. ■

**Remarque :** Avec le Lemme 9.4.6, on a que pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $t_x$  existe et est fini.

Le lemme suivant donne le comportement de  $u$  au voisinage de  $\Gamma$ .

**Lemme 9.4.7.** *On suppose que les hypothèses (H 9.4.1)-(H 9.4.4) and (H 9.4.6) sont vérifiées. Alors pour tout  $t \geq 0$ , on a*

$$\lim_{x \rightarrow \Gamma} u(x, t) = 0 \quad (9.4.144)$$

ce qui signifie que  $u(x, t)$  est continue sur  $\Gamma \times \mathbb{R}_+$ .

**Preuve :** Soit  $\epsilon > 0$ . On sait que  $v$  définie par (9.4.63) est uniformément continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  (cf [32]). De plus,  $v(x, 0) = u_0(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow \Gamma$ . D'où l'existence de  $A > 0$  et  $T > 0$  tels que :  $d_L(x, \Gamma) \leq A$  et  $t \leq T$  implique  $|v(x, t)| \leq \epsilon$ . D'après le Lemme 9.4.6, on voit qu'il existe  $\eta > 0$  tel que  $t_x \leq T$  lorsque  $d_L(x, \Gamma) \leq \eta$ . Comme  $|u(x, t)| \leq \max(|v(x, t)|, d_L(x, \Gamma))$ , on conclut donc que  $\forall t \geq 0$ ,  $|u(x, t)| \leq \epsilon$  lorsque  $d_L(x, \Gamma) \leq \min(\eta, \epsilon)$ . ■

On montre alors la continuité de  $x \mapsto t_x$ .

**Lemme 9.4.8.** *On suppose que les hypothèses (H 9.4.1)-(H 9.4.4) et (H 9.4.6) sont vérifiées. Si l'hypothèse (H 9.4.8) est aussi vérifiée, alors la fonction  $x \mapsto t_x$  est continue sur  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$ .*

**Preuve** La preuve est analogue à celle du Lemme 9.4.4. ■

Nous sommes maintenant en mesure de montrer la continuité de  $u(x, t)$  définie par (9.4.2).

**Proposition 9.4.8.** *On suppose que les hypothèses (H 9.4.1)-(H 9.4.4), (H 9.4.6) et (H 9.4.8) sont vérifiées. Alors la fonction  $u(x, t)$  définie par (9.4.2) est continue sur  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ .*

**Preuve :** La preuve est identique à celle de la Proposition 9.4.4, à l'exception du fait qu'il faut utiliser le Lemme 9.4.7 au lieu du Lemme 9.4.3. ■

Comme dans la sous-section précédente, on déduit de la Proposition 9.4.8 que :

**Proposition 9.4.9.** *On suppose que les hypothèses (H 9.4.1)-(H 9.4.4), (H 9.4.6) and (H 9.4.8) sont vérifiées. Alors la fonction  $u(x, t)$  définie par (9.4.2) est uniformément continue sur  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ .*

Le principale résultat de cette sous-section est une conséquence des Propositions 9.4.2, 9.4.3 et 9.4.9 :

**Théorème 9.4.2.** *On suppose que les hypothèses (H 9.4.1)-(H 9.4.4), (H 9.4.6) et (H 9.4.8) sont vérifiées. Alors la fonction  $u(x, t)$  définie par (9.4.2) est solution de viscosité de (9.4.1). De plus, elle est unique dans la classe des solutions de viscosité uniformément continue sur  $\mathbb{R}^2 \times [0, T]$ ,  $\forall T > 0$  et s'annulant sur  $\Gamma$ .*

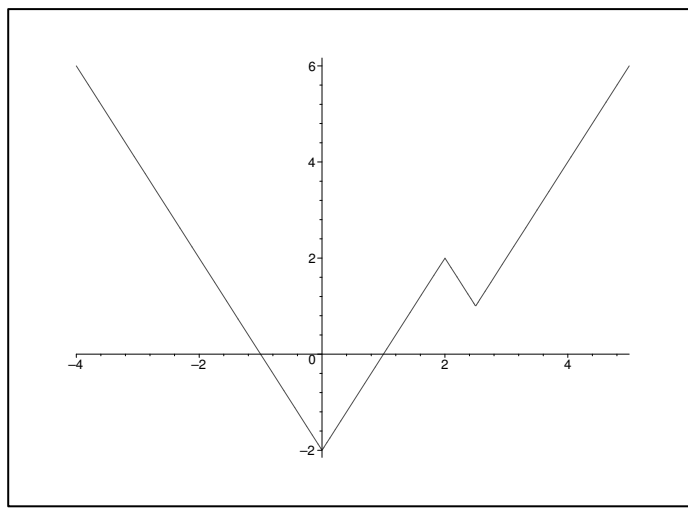


FIG. 9.7 –  $u_0(x)$

**Remarque :** Contrairement au cas de la sous-section précédente (lorsque nous avons supposé que (H 9.4.5) était vérifiée), nous ne connaissons pas de condition suffisante sur  $H$  et  $u_0$  tel que (H 9.4.8) soit vérifiée. On a simplement (la preuve est analogue à celle de la Proposition 9.4.7) :

**Proposition 9.4.10.** *On suppose que les hypothèses (H 9.4.1)-(H 9.4.4), (H 9.4.6) et (H 9.4.9) sont vérifiées. Si  $H$  satisfait (H 9.4.11) et si  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , alors les zéros de  $t \mapsto f(x, t)$  sont isolés ( $f$  est définie par (9.4.64)).*

### (iii) Discussion des hypothèses

On explique ici pourquoi on a été amené à introduire les hypothèses (H 9.4.5) ou (H 9.4.6). On considère un exemple dans lequel elles ne sont pas vérifiées. On suppose que  $u_0$  est donnée par (cf Figure 9.7) :

$$u_0(x) = \begin{cases} 2(|x| - 1) & \text{si } x \leq 2 \\ -2|x| + 6 & \text{si } 2 \leq x \leq \frac{5}{2} \\ 2|x| - 4 & \text{si } x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \quad (9.4.145)$$

et, on choisit :

$$H(t) = t^2 - 1 \quad (9.4.146)$$

Il est facile de voir que :

$$H^*(t) = \frac{t^2}{4} + 1 \quad (9.4.147)$$

Soit  $x$  dans  $(2, \frac{5}{2})$ . On peut vérifier que si  $x + 4t \leq \frac{5}{2}$  alors ( $v$  est définie par (9.4.63)) :

$$v(x, t) = -3t - 2x + 6 \quad (9.4.148)$$

Donc  $v(x, t) = 0$  si et seulement si  $t = \frac{7}{3} - x$ .

Si on suppose que  $x$  satisfait aussi à  $x \leq \frac{7}{3}$ , alors (en se rappelant (9.4.3)) :

$$t_x = \frac{7}{3} - x \quad (9.4.149)$$

Quand les deux conditions  $t = \frac{7}{3} - x$  et  $x + 4t \leq \frac{5}{2}$  sont vérifiées, on obtient :  $x \geq \frac{41}{18}$ . et on a que  $\frac{41}{18} < \frac{7}{3} = \frac{42}{18}$ .

On a donc lorsque  $\frac{41}{18} \leq x \leq \frac{7}{3}$  :

$$t_x = \frac{7}{3} - x \quad (9.4.150)$$

On choisit maintenant  $x$  dans  $[\frac{7}{3}, \frac{43}{18}]$ . Si  $t \leq \frac{1}{36}$ , alors  $x + 4t \leq \frac{5}{2}$ . On pose  $A = \frac{1}{36}$ . Si  $t \leq A$ , alors

$$u(x, t) = -3t - 2x + 6 \quad (9.4.151)$$

Il existe  $\epsilon > 0$  tel que : si  $\frac{7}{3} - \epsilon \leq x \leq \frac{7}{3}$ , alors  $d(x, \Gamma) \geq d(\frac{7}{3}, \Gamma) - A$ . Quitte à prendre  $\epsilon$  plus petit, on peut supposer que  $\frac{41}{18} < \frac{7}{3} - \epsilon$  et que  $t_x \leq A$  si  $\frac{7}{3} - \epsilon \leq x \leq \frac{7}{3}$ . Donc, si  $\frac{7}{3} - \epsilon \leq x \leq \frac{7}{3}$ , alors

$$u(x, A) = d(x, \Gamma) \geq d\left(\frac{7}{3}, \Gamma\right) - A \quad (9.4.152)$$

Et si  $\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{43}{18}$

$$u(x, A) = -3A - 2x + 6 \leq -3A + d\left(\frac{7}{3}, \Gamma\right) \quad (9.4.153)$$

On peut donc vérifier que  $u$  n'est pas continue en  $(\frac{7}{3}, A) = (\frac{7}{3}, \frac{1}{36})$ .

**Commentaire :** Cet exemple montre bien qu'avec la définition donnée pour  $t_x$ , on ne peut pas espérer obtenir la continuité de  $u$  si on ne rajoute pas des hypothèses. C'est pourquoi nous avons introduit les hypothèses (H 9.4.5) et (H 9.4.6).

## 9.5 . Hypothèses utilisées dans la Section 9.4

Par souci de clarté, on rappelle ici les hypothèses de la Section 9.4.

(H 9.4.1)  $u_0$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

(H 9.4.2)  $H$  est une fonction convexe sur  $\mathbb{R}^2$ .

(H 9.4.3)  $\lim_{|p| \rightarrow +\infty} \frac{H(p)}{|p|} = +\infty$ .

(H 9.4.4)  $H(0) < 0$  et  $\{p/H(p) = 0\}$  est non-vidé et symétrique par rapport à 0 (i.e.  $\{H(p) = 0\} \Rightarrow \{H(-p) = 0\}$ ).

(H 9.4.5)

$$\begin{cases} |u_0(x)| \leq d_L(x, \Gamma) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \\ u_0 \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

(H 9.4.6)

$$|u_0(x)| \geq d_L(x, \Gamma) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

(H 9.4.7) Pour tout  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , il existe  $\beta_x > 0$  tel que :

$$\begin{cases} f(x, t) \leq 0 & \forall t \in [0, t_x] \\ f(x, t) > 0 & \forall t \in ]t_x, t_x + \beta_x] \end{cases}$$

(H 9.4.8) Pour tout  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , il existe  $\beta_x > 0$  tel que :

$$\begin{cases} f(x, t) \geq 0 & \forall t \in [0, t_x] \\ f(x, t) < 0 & \forall t \in ]t_x, t_x + \beta_x] \end{cases}$$

(H 9.4.9)  $u_0$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

(H 9.4.10)

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^2} (H^*(x) - |x| \|\nabla u_0\|_\infty) > 0$$

(H 9.4.11)  $H^*$  est radiale et  $H^{*''}(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

(H 9.4.12)

$$\begin{cases} H(\|\nabla u_0\|_\infty) \leq 0 \\ H \text{ radiale} \\ H^{*''}(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

## 9.6 . Conclusion et perspectives

Nous terminons ici l'étude de l'EDP (9.4.1). Sous des hypothèses techniques, mais raisonnables, nous sommes parvenus à montrer l'existence d'une solution de viscosité continue, tout comme pour l'EDP (9.3.1). Nous avons aussi un résultat d'unicité dans la classe des solutions s'annulant sur  $\Gamma$ . Par-contre, la question de savoir, si toute solution de viscosité continue de (9.4.1) ou même de (9.3.1) reste nulle sur  $\Gamma$ , est une question ouverte.

## Quatrième partie

### Annexes



# Annexe A

## Ondelettes

Nous rappelons ici quelques propriétés fondamentales des ondelettes. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [125, 133, 69, 124, 123].

### A.1 . Cas 1-D

**Définition A.1.1.** Une ondelette mère  $\psi(t)$  est une fonction satisfaisant les propriétés suivantes :

1.  $\psi$  est une fonction régulière (avec  $r - 1$  dérivées continues et une dérivée d'ordre  $r$  bornée).
2.  $\psi$  et ses dérivées d'ordres inférieurs à  $r$  ont une décroissance rapide à l'infini.
3. La famille  $\psi_{j,k}(t)$  définies par  $\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j t - k)$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$ , est une base orthonormale de  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Définition A.1.2.** Un espace multi-résolution de  $L^2(\mathbb{R})$  est une suite  $V_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , de sous-espaces de  $L^2(\mathbb{R})$  avec les propriétés suivantes :

1.

$$\bigcap_j V_j = \emptyset$$

2.

$$V_j \subset V_{j+1}$$

3.

$$\bigcup_j V_j = L^2$$

4.  $f(t) \in V_j$  si et seulement si  $f(2t) \in V_{j+1}$

5. Il existe une fonction  $\phi(t)$  régulière (de même régularité que l'ondelette mère) à support compact telle que la famille  $\phi(t - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  soit une base orthonormale de  $V_0$  (pour le produit scalaire de  $L^2(\mathbb{R})$ ). Une telle fonction  $\phi$  est appelée fonction d'échelle.

Il est immédiat de vérifier que :

La famille  $\phi_{j,k}(t)$  définie par  $\phi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j t - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , est une base orthonormale de  $V_j$ .  
(A.1.1)



Donnons maintenant le lien entre base d'ondelettes et espace multi-résolution (nous nous contentons de donner l'idée générale, tous les détails de cette construction se trouvent dans les travaux de S.G. Mallat [124, 125, 123]) :

Supposons que l'on ait un espace multi-résolution, et construisons une base orthonormale d'ondelettes. Soit  $W_0$  le complémentaire orthogonal de  $V_0$  dans  $V_1$ . On construit l'ondelette mère en imposant la condition suivante :

$$\psi(t - k), k \in \mathbb{Z}, \text{ est une base orthonormale de } W_0. \quad (\text{A.1.2})$$

Cette propriété ne définit pas l'ondelette mère de manière unique. Il faut également imposer des conditions de régularité et localisation sur  $\psi$  pour avoir l'unicité.

Par changement d'échelle, on obtient aisément que :

$$\begin{aligned} &\text{La famille } \psi_{j,k}(t) \text{ définie par } \psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k), k \in \mathbb{Z}, \\ &\text{est une base orthonormale de } W_j \text{ complémentaire orthogonal de } V_j \text{ dans } V_{j+1} \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

**Remarque :** Pour  $j \in \mathbb{Z}$ , on note donc  $W_j$  le complémentaire orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$ . On a

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1} \quad (\text{A.1.4})$$

et puisque les  $V_j$  forment un espace multi-résolution,

$$V_J = \bigoplus_{j=-\infty}^{J-1} W_j \quad (\text{A.1.5})$$

Il est alors clair que :

$$\text{La famille } \psi_{j,k}(t), j, k \in \mathbb{Z} \text{ est une base orthonormale de } L^2(\mathbb{R}). \quad (\text{A.1.6})$$

Pour toute fonction  $z$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , on a la décomposition :

$$z = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_k w_{j,k} \psi_{j,k} \quad (\text{A.1.7})$$

**Interprétation :** Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . On note  $A_{2^j} f$  (resp.  $D_{2^j} f$ ) l'opérateur qui approche  $f$  (resp. les détails de  $f$ ) à la résolution  $2^j$ . Plus précisément,  $A_{2^j} f$  (resp.  $D_{2^j} f$ ) est la projection de  $f$  sur  $V_j$  (resp. sur  $W_j$ ).

$$A_{2^j} f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f(u), \phi_{j,k}(u) \rangle \phi_{j,k}(x) \quad (\text{A.1.8})$$

$A_{2^j} f$  est caractérisé par la suite de produit scalaire  $A_{2^j}^d f$  :

$$A_{2^j}^d f = (\langle f(u), \phi_{j,k}(u) \rangle)_{k \in \mathbb{Z}} \quad (\text{A.1.9})$$

On appelle  $A_{2^j}^d f$  l'approximation discrète de  $f$  à la résolution  $2^j$ . Chaque produit scalaire peut être réinterprété comme un produit de convolution évalué au point  $2^{-j}k$  :

$$\langle f(u), \phi_{j,k}(u) \rangle = (f(u) * \phi_{j,0}(-u))(k) \quad (\text{A.1.10})$$

D'où :

$$A_{2^j}^d f = ((f(u) * \phi_{j,0}(-u))(k))_{k \in \mathbb{Z}} \quad (\text{A.1.11})$$

$\phi(x)$  étant une fonction passe-bas (c'est une conséquence de la définition d'une fonction d'échelle), (A.1.11) peut être interprétée comme un filtrage passe-bas de  $f$ .

Lorsqu'on étudie un signal, on n'en a qu'une représentation  $A_1^d f$ , et on suppose que  $A_1 f = f$ . On ne peut pas remonter plus dans les échelles.

De la même manière, on a :

$$D_{2^j} f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f(u), \psi_{j,k}(u) \rangle \psi_{j,k}(x) \quad (\text{A.1.12})$$

$D_{2^j} f$  est caractérisé par la suite de produit scalaire  $D_{2^j}^d f$  :

$$D_{2^j}^d f = (\langle f(u), \psi_{j,k}(u) \rangle)_{k \in \mathbb{Z}} \quad (\text{A.1.13})$$

On appelle  $D_{2^j}^d f$  les détails de  $f$  à la résolution  $2^j$ . Chaque produit scalaire peut être réinterprété comme un produit de convolution évalué au point  $2^{-j}k$  :

$$\langle f(u), \psi_{j,k}(u) \rangle = (f(u) * \psi_{j,0}(-u))(k) \quad (\text{A.1.14})$$

D'où :

$$D_{2^j}^d f = ((f(u) * \psi_{j,0}(-u))(k))_{k \in \mathbb{Z}} \quad (\text{A.1.15})$$

(A.1.15) peut être interprété comme un filtrage passe-haut de  $f$ .

Dans la suite, pour simplifier les notations, nous ne ferons plus de différences entre  $A_{2^j}$  et  $A_{2^j}^d$  (resp.  $D_{2^j}$  et  $D_{2^j}^d$ ).

La relation (A.1.4) se traduit par :

$$A_{2^{-j}} f + D_{2^{-j}} f = A_{2^{-j+1}} f \quad (\text{A.1.16})$$

et on a aussi :

$$A_1 f = \left( A_{2^{-j}} f, (D_{2^j} f)_{-J \leq j \leq -1} \right) \quad (\text{A.1.17})$$

$J$  est l'ordre de la décomposition en ondelettes.

C'est ce qu'on appelle la représentation en ondelettes de  $f$ .

On peut réécrire A.1.17 ainsi :

$$A_1 f = \sum_k u_{J,k} \phi_{J,k} + \sum_{j=-J}^{-1} \sum_k w_{j,k} \psi_{j,k} \quad (\text{A.1.18})$$

Les coefficients  $u_{J,k}$  et  $w_{j,k}$  sont les coefficients en ondelettes de  $A_1 f$ .

## A.2 . Cas 2-D

Une manière de passer du cas 1-D au cas 2-D consiste à utiliser le produit tensoriel. Fonction d'échelle et ondelette mère sont alors données par les formules suivantes :

- Fonction d'échelle :

$$\Phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$$

$A_{2^{-1}}f$	$D_{2^{-1}}^1 f$
$D_{2^{-1}}^2 f$	$D_{2^{-1}}^3 f$

FIG. A.1 – Cas 2-D

- Ondelette mère :  $(\Psi^1, \Psi^2, \Psi^3)$ , avec :

$$\begin{aligned}\Psi^1(x, y) &= \phi(x)\psi(y) \\ \Psi^2(x, y) &= \psi(x)\phi(y) \\ \Psi^3(x, y) &= \psi(x)\psi(y)\end{aligned}$$

La figure A.1 montre comment on représente classiquement la transformée en ondelettes d'une image  $A_1 f$ . L'indice  $k$  dans  $D_{2^j}^k f$  se rapporte à celui de  $\Psi^k$ . On peut interpréter  $D_{2^j}^1 f$  comme les détails horizontaux de  $f$ ,  $D_{2^j}^2 f$  comme les détails verticaux, et  $D_{2^j}^3 f$  comme les autres détails. La figure A.2 permet de le vérifier.

$$A_1 f = \left( A_{2^{-j}} f, (D_{2^j}^1 f)_{j \leq j \leq -1}, (D_{2^j}^2 f)_{j \leq j \leq -1}, (D_{2^j}^3 f)_{j \leq j \leq -1} \right)$$

Grâce aux coefficients en ondelettes, il est donc théoriquement possible (cf [124]) de différencier les textures sur des critères d'orientation.

**Remarque :** Les ondelettes 2D ont ici été obtenues par séparation des variables. Elles présentent des directions privilégiées : horizontale et verticale (et dans une moindre mesure diagonale). Mais ce n'est pas la seule construction possible (voir par exemple [132, 54]).

### A.3 . Débruitage par seuillage en ondelettes

Une application particulièrement intéressante des ondelettes concerne le débruitage d'image. Si on suppose qu'une image originale  $u$  a été dégradée par un bruit blanc gaussien, une méthode efficace pour restaurer l'image dégradée  $f$  consiste à seuiller ses coefficients en ondelettes.

Définissons un opérateur de seuillage :

$$\theta_\tau(t) = \begin{cases} t - \tau & \text{si } t \geq \tau \\ 0 & \text{si } t \leq \tau \\ t + \tau & \text{si } t \leq -\tau \end{cases} \quad (\text{A.3.1})$$

L'intérêt d'utiliser une base d'ondelettes orthonormales pour restaurer l'image dégradée  $f$  provient du fait que ses coefficients en ondelettes  $c_{j,k}(f)$  sont des variables aléatoires gaussiennes centrées de variance  $\sigma$  ( $\sigma$  correspondant au niveau du bruit blanc gaussien).

Le seuillage en ondelette doux de  $f$  de paramètre  $\tau$ , noté  $WST(f, \tau)$  dans le manuscrit (Wavelet Soft Thresholding), est la fonction dont les coefficients en ondelette s'écrivent  $\theta_\tau(c_{j,k}(f))$ . La valeur théorique proposée par Donoho est  $\tau = \sigma \sqrt{2 \log(N^2)}$ , où  $N^2$  désigne la taille de l'image (en pratique, cette valeur du seuil est souvent trop forte).

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [76, 120, 133, 125].

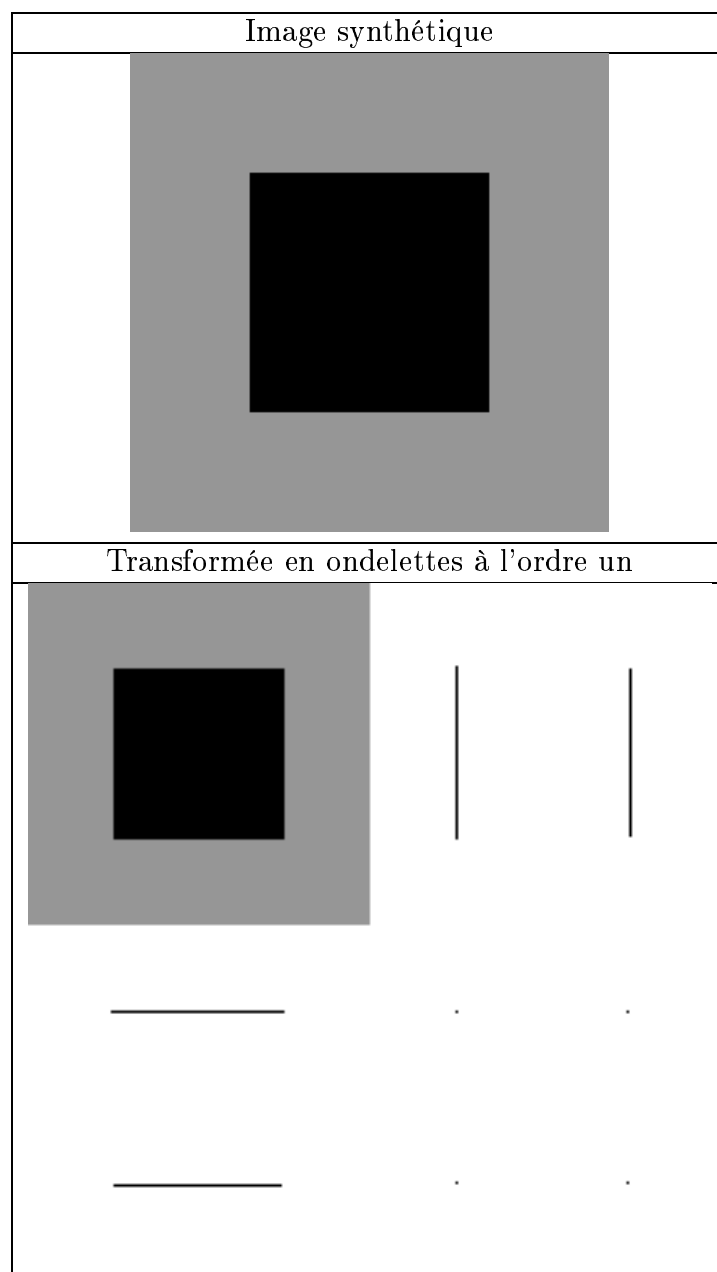


FIG. A.2 – Orientation et transformée en ondelettes



# Annexe B

## Représentation non linéaire multi-échelle pour les images géométriques

Dans cette annexe, on présente un algorithme de compression pour les images géométriques développé récemment par Cohen et Matei [131, 11].

**Introduction :** Alors que les ondelettes 2D standards fournissent des représentations creuses pour les images texturées, elles n'exploitent pas le fait que les discontinuités (bords) délimitant les régions texturées se trouvent le long de contours lisses. Cela entraîne parfois des résultats algorithmiques décevants. Cette constatation est à l'origine de nouvelles directions de recherche pour trouver des représentations compactes des structures : les curvlets [46], les contourlets [75] et les bandlets [111]. Les représentations multi-échelle Edge Adapted (EA) introduites dans [131, 11] sont une autre possibilité pour de telles améliorations. Cette transformée est basée sur le cadre discret développé par Ami Harten [95].

### B.1 . Formalisme d'Harten

On peut décrire les idées de A. Harten de la manière suivante : on part d'un ensemble fini  $v^J = (v_k^J)$  de données discrètes au niveau de résolution  $J$ . Pour tout  $j$ , on définit un opérateur de décimation  $D_j^{j-1}$  (qui extrait de  $(v_k^j)$  la donnée discrète  $(v_k^{j-1})$  au niveau de résolution supérieur), et un opérateur de prédiction  $P_{j-1}^j$  (qui donne une approximation  $(\hat{v}_k^j)$  de  $(v_k^j)$  à partir de  $(v_k^{j-1})$ ). L'opérateur de décimation est toujours un opérateur linéaire. Par-contre, on autorise que l'opérateur de prédiction soit non linéaire. De plus, ces deux opérateurs doivent vérifier la relation de consistance suivante :  $D_j^{j-1} P_{j-1}^j = I$ . En conséquence, on peut représenter  $v^j$  par  $(v^{j-1}, e^{j-1})$ , où  $e^{j-1}$  désigne l'erreur de prédiction. Cette dernière appartient au noyau de l'opérateur  $D_j^{j-1}$  (à cause de la relation de consistance). On représente l'erreur  $e^j$  sur une base du noyau de  $D_j^{j-1}$ , ce qui donne le vecteur détail  $d^{j-1}$ . On peut ainsi représenter  $v^j$  par  $(v^{j-1}, d^{j-1})$ . En itérant la procédure du niveau de résolution le plus fin  $J$  au niveau de résolution le plus grossier  $j = 0$  on obtient une représentation multi-échelle de  $v^J$  par  $(v^0, d^0, \dots, d^{J-1})$ .

## B.2 . Représentation multi-résolution adaptée aux contours

### B.2.1 Formalisme 1D

Par souci de clarté, on considère d'abord le cas 1D. On considère des discrétisations hiérarchiques par cellules-moyennes  $v_k^j := 2^j \int_{c_k^j} v(x) dx$ , où  $c_k^j := [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ . Ce choix fixe l'opérateur de décimation comme étant  $v_k^{j-1} := \frac{1}{2}(v_{2k}^j + v_{2k+1}^j)$ . En utilisant  $e_{2k}^{j-1} + e_{2k+1}^{j-1} = 0$ , on définit les détails par  $d_k^{j-1} = e_{2k}^j$ .

On veut maintenant définir un bon opérateur de prédiction. Celui-ci doit rendre l'erreur d'approximation (et donc les coefficients des détails) la plus petite possible. Cela se traduira par une représentation creuse de la donnée. Le choix le plus facile pour un tel opérateur est de prendre  $\hat{v}_{2k}^j = \hat{v}_{2k+1}^j = v_k^{j-1}$ , ce qui correspond à une décomposition dans le système d'ondelettes de Haar (et fournit donc une faible précision). On peut augmenter l'ordre de l'approximation en utilisant un polynôme de reconstruction de degré supérieur, en définissant  $p_k^{j-1}$  comme l'unique polynôme quadratique satisfaisant aux moyennes  $(v_{k-1}^{j-1}, v_k^{j-1}, v_{k+1}^{j-1})$ , et en définissant  $\hat{v}_{2k}^j$  et  $\hat{v}_{2k+1}^j$  comme les moyennes de  $p_k^{j-1}$  sur les intervalles correspondants. La transformation mutli-échelle qui résulte de cette procédure est équivalente à la transformée en ondelettes biorthogonales (BW). Cela augmente l'ordre d'approximation dans les régions régulières, mais cela génère aussi des oscillations au voisinage des singularités.

**Mécanisme ENO :** On peut améliorer la méthode en utilisant un opérateur de prédiction non linéaire, comme la reconstruction ENO (*essentially non-oscillatory*), comme proposée dans [95]. L'objectif d'un tel opérateur est d'améliorer l'ordre d'approximation au voisinage des singularités. L'opérateur de reconstruction ENO sélectionne parmi les polynômes  $(p_{k-1}^{j-1}, p_k^{j-1}, p_{k+1}^{j-1})$  le moins oscillant (par rapport à un critère numérique utilisant seulement les valeurs du niveau immédiatement plus grossier).

**Technique de résolution sous-cellulaire :** on peut aller plus loin avec ces idées en utilisant la technique de résolution sous-cellulaire dans les cellules contenant des singularités. Ces cellules sont détectées comme étant celles pour lesquelles les supports des polynômes adjacents (sélectionnés par le mécanisme ENO) ne s'intersectent pas (cf figure B.1). Pour de telles cellules, on utilise alors un polynôme de reconstruction constant par morceau

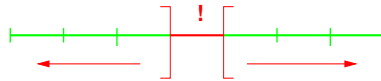


FIG. B.1 – Cellule singulière

$p_{k-2}^{j-1} \mathbf{1}_{]-\infty, y]} + p_{k+2}^{j-1} \mathbf{1}_{[y, \infty[}$ , où  $y$  est obtenu par consistance avec la moyenne  $v_k^{j-1}$ .

**Exemple :** Sur la Figure B.2 on montre la reconstruction d'une fonction régulière par morceau à partir du niveau de résolution 3. Cela montre bien la précision de la méthode de reconstruction non linéaire (ENO-SR). La prédiction BW est précise pour les fonctions régulières, et exacte pour les fonctions polynomiales, alors que la prédiction ENO-SR est précise pour les fonctions régulières par morceau, et exacte pour les fonctions polynomiales par morceau.

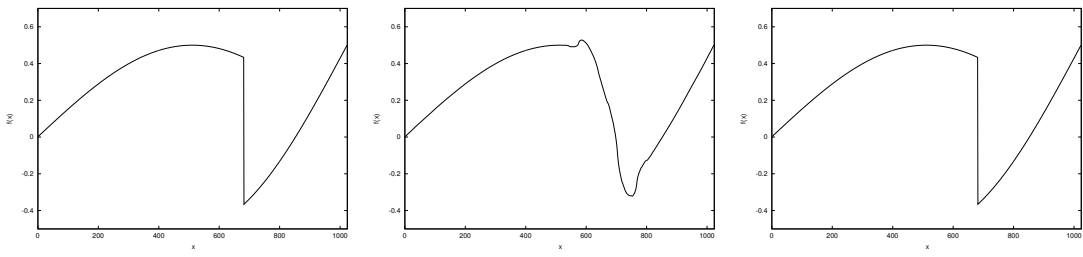


FIG. B.2 – (a) Fonction originale, (b) BW et (c) ENO-SR

## B.2.2 Formalisme 2D

En 2D (dans le cas des images numériques), on considère des discrétisations hiérarchiques par des cellules moyennes  $v_k^j := 2^{2j} \int_{C_{j,k}} v(x, y) dx dy$ , où  $C_{j,k} := [k_x 2^{-j}, (k_x+1)2^{-j}] [k_y 2^{-j}, (k_y+1)2^{-j}] = I_{j,k_x} I_{j,k_y}$ , avec  $k = (k_x, k_y) \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^2$ . Le niveau le plus fin  $J$  correspond à la discrétisation par pixel. Ce choix fixe l'opérateur de décimation comme étant :  $v_k^{j-1} := \frac{1}{4}(v_{2k_x, 2k_y}^j + v_{2k_x, 2k_y+1}^j + v_{2k_x+1, 2k_y}^j + v_{2k_x+1, 2k_y+1}^j)$ .

Comme dans le cas 1D, l'objectif est maintenant de définir un bon opérateur de prédiction, qui rende l'erreur d'approximation (et donc les coefficients des détails) la plus petite possible. Cela se traduira par une représentation creuse pour une classe de fonctions modélisant bien l'image. Le choix le plus facile pour un tel opérateur est  $\hat{v}_n^j = v_k^{j-1}$  si  $C_{j,n} \subset C_{j-1,k}$ , ce qui correspond à une décomposition dans le système d'ondelettes de Haar (et fournit donc une faible précision). On peut augmenter l'ordre de l'approximation en utilisant un polynôme de reconstruction de degré supérieur, en définissant  $p_k^{j-1}$  comme l'unique polynôme bi-quadratique satisfaisant aux moyennes  $v_{k+l}^{j-1}$ ,  $l \in \{-1, 0, 1\}^2$ , comme les moyennes sur le niveau immédiatement plus fin de  $p_k^{j-1}$  sur les cellules correspondantes. La transformation mutli-échelle qui résulte de cette procédure est équivalente à la transformée en ondelettes biorthogonales (BW). Cela augmente l'ordre d'approximation dans les régions régulières, mais cela génère aussi des oscillations au voisinage des singularités.

**Technique “Edge Adapted” (EA) :** L'objectif d'un opérateur non linéaire de prédiction tel que l'ENO (cf [95, 5, 131]) est d'améliorer l'ordre d'approximation au voisinage des singularités. La reconstruction ENO sélectionne parmi les polynômes  $p_{k+l}^{j-1}$ ,  $l \in \{1, 0, 1\}^2$  le moins oscillant (par rapport à un critère numérique basé seulement sur les valeurs au niveau immédiatement plus grossier).

On peut aller plus loin avec ces idées en utilisant la technique “edge adapted” dans les cellules contenant des singularités. L'opérateur de prédiction EA agit en trois étapes :

- Dans une première étape, il détecte les pixels susceptibles de contenir un bord en utilisant le mécanisme suivant : une cellule est étiquetée comme étant singulière si une discontinuité est détectée horizontalement ou verticalement à l'aide du critère ENO 1D.
- Dans une seconde étape, afin d'éliminer de fausses alarmes, on vérifie que la configuration locale est compatible avec le modèle d'une discontinuité droite, comme illustré sur la Figure B.3.
- Afin d'être précis pour des fonctions régulières par morceaux séparées par des bords réguliers, l'opérateur EA est exact pour des fonctions polynomiales par morceaux séparées par des bords réguliers (cf [131]) comme illustré sur la Figure B.4.

C'est pourquoi, dans une troisième étape, dans les cellules non singulières, on utilise



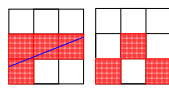


FIG. B.3 – Configurations admissible et non-admissible



FIG. B.4 – Image originale, moyennes grossières et reconstruction

un polynôme bi-quadratique de support  $3 \times 3$  qui évite les cellules singulières. Dans les cellules singulières, on commence par estimer les paramètres du bord, puis on définit un polynôme quadratique par morceaux en utilisant une paire de configurations  $3 \times 3$  de chaque côté du bord comme illustré sur la Figure B.5.

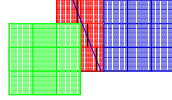


FIG. B.5 – Reconstruction d'un bord

Pour plus de détails sur l'opérateur de prédiction EA, on renvoie le lecteur à [131] et [61] où cette procédure a été introduite, et où les propriétés de ses opérateurs ont été étudiées.

# Annexe C

## Bruit de chatolement

### C.1 . Statistique du speckle pleinement développé

Un radar émet une onde cohérente qui se réfléchit sur la cible. Il capte ensuite l'onde réfléchie et obtient une image [113, 101, 140].

Lorsque l'on observe la réflexion d'une onde cohérente sur une surface rugueuse, on constate que l'image observée est perturbée par un bruit particulièrement important. Cela se manifeste par un aspect granuleux de l'image. C'est pourquoi on donne le nom de speckle ou chatolement à ce phénomène. Nous reprenons le formalisme de Goodman [92].

Nous ne nous préoccupons pas ici de la manière dont le signal radar est acquis.

#### Préliminaires

L'onde rétrodiffusée est reçue au niveau du capteur du radar sous la forme d'un signal complexe  $F = a e^{j\phi}$ , où  $a \in \mathbb{R}_+$  et  $\phi \in ]-\pi; \pi]$ .

A l'intérieur de chaque cellule de résolution, dont la taille est grande par rapport à la longueur d'onde, se trouve un nombre fini  $N$  de réflecteurs élémentaires, ayant chacun réfléchi l'onde électro-magnétique, et dont les signaux s'additionnent de façon cohérente pour former le signal rétrodiffusé :

$$F = a e^{j\phi} = \sum_{i=1}^N a_i e^{j\phi_i} \quad (\text{C.1.1})$$

avec  $\forall i, a_i \in \mathbb{R}_+$  et  $\phi_i \in ]-\pi; \pi]$ .

Physiquement, on ne peut pas avoir accès à chaque réflecteur élémentaire. C'est pourquoi le champ réfléchi peut être considéré comme une variable aléatoire dépendant de la répartition des réflecteurs. Ce phénomène apparaît sur les images radar sous la forme d'un bruit important connu sous le nom de chatolement ou speckle (speckle signifiant granulosité en anglais, ce qui correspond bien au bruit observé).

Sous certaines hypothèses connues sous le nom de "speckle totalement développé", le speckle des images peut être statistiquement parfaitement modélisé.

#### C.1.1 Speckle totalement développé en 1 vue

##### Notations

Soit  $X$  une variable aléatoire, on note :

- $f_X$  la densité de probabilité de  $X$ .
- $\mu_X = E[X] = \overline{X}$  l'espérance mathématique de  $X$ .
- $(\sigma_X)^2 = Var[X] = E[(X - E[X])^2]$  la variance de  $X$ .
- $\gamma_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$  le coefficient de variation de  $X$ .
- $\chi_X$  la fonction caractéristique de  $X$  (définie par  $\chi_X(v) = E[e^{ivX}]$ ).

## Modélisation

Nous rappelons ici les hypothèses de Goodman [92, 91].

### Speckle totalement développé :

(HC.1)  $a_i$  et  $\phi_i$  sont indépendantes l'une de l'autre pour chaque réflecteur  $i$ .

(HC.2)  $a_i$  et  $\phi_i$  sont indépendantes des amplitudes et des phases des autres réflecteurs.

(HC.3) Les phases  $\phi_i$  sont uniformément distribuées sur  $]-\pi; \pi]$  (cela revient à supposer que la surface est rugueuse par rapport à la longueur d'onde, c'est-à-dire supposer que les dimensions caractéristiques de la surface sont petites devant la longueur d'onde).

Dans la suite, nous normalisons les amplitudes des réflecteurs élémentaires en remplaçant  $a_i$  par  $\frac{a_i}{\sqrt{N}}$ .

**Proposition C.1.1.** *Avec ces hypothèses,  $Re(F)$  et  $Im(F)$  sont des variables aléatoires de moyenne nulle, de variance égale à  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{E[a_i^2]}{2}$ , et elles sont décorrélées.*

**Preuve :** La preuve repose sur l'indépendance des  $a_i$  et des  $\phi_i$ . On utilise le fait que la valeur moyenne d'un cosinus est nulle, et que celle d'un cosinus carré vaut  $\frac{1}{2}$ . On a  $Re(F) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N a_i \cos \phi_i$ , et  $Im(F) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N a_i \sin \phi_i$ . Donc :

$$E[Re(F)] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N E[a_i] \underbrace{E[\cos \phi_i]}_{=0} = 0 \quad (C.1.2)$$

et

$$E[Im(F)] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N E[a_i] \underbrace{E[\sin \phi_i]}_{=0} = 0 \quad (C.1.3)$$

Puis :

$$\begin{aligned}
\text{Var}[Re(F)] &= E[(Re(F) - E[Re(F)])^2] \\
&= E \left[ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (a_i \cos \phi_i)^2 \right] \\
&= \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N E[a_i^2] \underbrace{E[(\cos \phi_i)^2]}_{=\frac{1}{2}} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} E[a_i] E[a_j] \underbrace{E[\cos \phi_i]}_{=0} \underbrace{E[\cos \phi_j]}_{=0} \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{E[a_i^2]}{2}
\end{aligned}$$

Et de même,  $\text{Var}[Im(F)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{E[a_i^2]}{2}$ . Pour la covariance, on écrit :

$$\begin{aligned}
&\text{Cov}(Re(F), Im(F)) \\
&= \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N E[a_i^2] \underbrace{E[\cos \phi_i \sin \phi_i]}_{=E\left[\frac{\sin(2\phi_i)}{2}\right] = 0} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} E[a_i] E[a_j] \underbrace{E[\cos \phi_i]}_{=0} \underbrace{E[\sin \phi_j]}_{=0} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

### Calcul de la densité de probabilité jointe de $Re(F)$ et $Im(F)$

Nous rajoutons d'abord deux hypothèses (comme dans [92, 113]), qui vont nous permettre avec ce qui précède d'appliquer le théorème central limite :

(H C.4) Il y a un grand nombre de réflecteurs élémentaires dans chaque cellule de résolution.

(H C.5) Aucun des réflecteurs élémentaires n'a une réflectivité trop forte tendant à dominer la réflectivité totale (d'un point de vue mathématique, on suppose en fait que les  $a_i$  sont uniformément bornées).

On se place donc désormais dans le cas où  $N$  est grand.

Les variables  $a_i \cos \phi_i$  étant indépendantes et uniformément bornées, le théorème central limite (la version forte de Lindeberg [83, 84]) nous permet alors d'affirmer que  $Re(F)$  est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle, et de variance  $\sigma^2$ , avec :

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{E[a_i^2]}{2} \tag{C.1.4}$$

Il en est de même pour  $Im(F)$ .

De plus,  $\text{Re}(F)$  et  $\text{Im}(F)$  étant des variables aléatoires gaussiennes décorréliées, elles sont donc indépendantes.

On dit que  $F$  est une variable aléatoire gaussienne circulaire complexe.

C'est pourquoi on parle de speckle gaussien dans le cas du speckle totalement développé sur une zone physiquement homogène.  $\text{Re}(F)$  et  $\text{Im}(F)$  ont la même densité de probabilité :

$$f_{\text{Re}(F)}(x) = f_{\text{Im}(F)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{C.1.5})$$

Comme  $\text{Re}(F)$  et  $\text{Im}(F)$  sont indépendantes, on a :

$$f_{\text{Re}(F), \text{Im}(F)}(x, y) = f_{\text{Re}(F)}(x) f_{\text{Im}(F)}(y)$$

Donc :

$$f_{\text{Re}(F), \text{Im}(F)}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{C.1.6})$$

### Lois de l'intensité $I$ et de l'amplitude $A$

**Notations :** On note  $I$  l'intensité lumineuse,  $\Phi$  la phase, et  $A$  l'amplitude.  $I = (\text{Re}(F))^2 + (\text{Im}(F))^2$ ,  $\Phi = \text{Arg}(F)$ , et  $A = \sqrt{I}$ .

#### Proposition C.1.2.

1. La phase  $\Phi$  est distribuée uniformément sur  $]-\pi; \pi]$  :

$$f_{\Phi}(y) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{\{-\pi \leq y \leq \pi\}} \quad (\text{C.1.7})$$

2. L'intensité lumineuse  $I$  suit une loi exponentielle négative de paramètre  $2\sigma^2$  de densité de probabilité :

$$f_I(x) = \frac{1}{\mu_I} e^{-\frac{x}{\mu_I}} \mathbf{1}_{x \geq 0} \quad (\text{C.1.8})$$

On a :  $\mu_I = \sigma_I = 2\sigma^2$ .

3. L'amplitude  $A$  suit une loi de Rayleigh de densité de probabilité :

$$f_A(y) = \frac{2y}{\mu_I} e^{-\frac{y^2}{\mu_I}} \mathbf{1}_{y \geq 0} \quad (\text{C.1.9})$$

Elle vérifie :  $\mu_A = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$ , et  $\sigma_A = \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}\sigma$ .

#### Remarques :

1. Le fait que la phase  $\Phi$  soit distribuée uniformément sur  $]-\pi; \pi]$  correspond bien aux hypothèses que nous avons faites.
2. On voit que l'intensité  $I$  et la phase  $\Phi$  sont indépendantes, ce qui est en accord avec nos hypothèses de départ.
3. On peut remarquer que l'écart type de l'intensité varie proportionnellement à sa moyenne. Les zones claires d'une image auront donc une variabilité bien plus importante que les zones sombres. C'est pourquoi on dit que le speckle est un bruit multiplicatif.

**Preuve de la Proposition C.1.2 :**

**Calcul de la densité de probabilité jointe de I et  $\Phi$  :**

$$\begin{aligned} P(I < i, \Phi < \phi) &= P((\operatorname{Re}(F))^2 + (\operatorname{Im}(F))^2 < i, \operatorname{Arg}(\operatorname{Re}(F) + j\operatorname{Im}(F)) < \phi) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{x^2+y^2 < i, \operatorname{Arg}(x+jy) < \phi\}} f_{\operatorname{Re}(F), \operatorname{Im}(F)}(x, y) dx dy \end{aligned}$$

On fait le changement de variables :  $\rho = x^2 + y^2$  et  $\alpha = \operatorname{Arg}(x + jy)$ , i.e.  $x = \sqrt{\rho} \cos \alpha$  et  $y = \sqrt{\rho} \sin \alpha$ . On calcule le Jacobien :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \cos \alpha & \sqrt{\rho} \sin \alpha \\ \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \sin \alpha & \sqrt{\rho} \cos \alpha \end{vmatrix}$$

Donc  $|J| = \frac{1}{2}$ . D'où

$$P(I < i, \Phi < \phi) = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{\rho < i, \alpha < \phi\}} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) \frac{d\rho d\alpha}{2}$$

On en déduit la densité de probabilité jointe de I et  $\Phi$  :

$$f_{I,\Phi}(x, y) = \frac{1}{4\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \mathbf{1}_{\{x \geq 0, -\pi \leq y \leq \pi\}} \quad (\text{C.1.10})$$

Par conséquent, la loi de la phase  $\Phi$  est donc :

$$f_{\Phi}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{I,\Phi}(x, y) dx \quad (\text{C.1.11})$$

i.e. (C.1.7).

La loi de  $I$  est :

$$f_I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{I,\Phi}(x, y) dy \quad (\text{C.1.12})$$

i.e. (C.1.8).

**Calcul de la fonction caractéristique de I**

$$\chi_I(v) = E[e^{ivI}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivx} f_I(x) dx$$

Donc d'après (C.1.8),

$$\chi_I(v) = \int_0^{\infty} e^{ivx} \frac{1}{\mu_I} e^{-\frac{x}{\mu_I}} dx = \frac{1}{\mu_I} \left[ \frac{\exp\left(x \left(\frac{-1}{\mu_I} + iv\right)\right)}{\frac{-1}{\mu_I} + iv} \right]_0^{\infty}$$

Et finalement :

$$\chi_I(v) = \frac{1}{1 - i\mu_I v} \quad (\text{C.1.13})$$

$$\begin{aligned}
 P(A < a) &= E[\mathbf{1}_{A < a}] \\
 &= E[\mathbf{1}_{\sqrt{I} < a}] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\sqrt{x} < a\}} f_I(x) dx \\
 &= \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{\{\sqrt{x} < a\}} \frac{1}{\mu_I} \exp\left(-\frac{x}{\mu_I}\right) dx \\
 (x = y^2) &= \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{\{y < a\}} \frac{1}{\mu_I} \exp\left(-\frac{y^2}{\mu_I}\right) 2y dy
 \end{aligned}$$

On en déduit ainsi la densité de probabilité de l'amplitude  $A$ , et donc le troisième point de la proposition. ■

**Coefficient de variation :** Un paramètre généralement utilisé en imagerie radar pour caractériser l'homogénéité d'une zone est le coefficient de variation ou écart type normalisé :

$$\gamma_X = \frac{\sqrt{\text{Var}[X]}}{E[X]} = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (\text{C.1.14})$$

Dans le cas du speckle totalement développé, le coefficient de variation en intensité  $I$  est égal à 1, et celui de l'amplitude est  $\gamma_A = \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$ .

### C.1.2 Statistiques du speckle totalement développé en L-vues

Pour réduire l'effet du speckle, la technique du multi-vues est utilisée au niveau du processeur SAR. Celle-ci consiste à additionner plusieurs images de la même zone de façon incohérente.

Soit

$$J = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L I_k$$

$\forall k$ ,  $I_k$  suit une loi exponentielle négative de densité de probabilité (C.1.8) et de fonction caractéristique (C.1.13).

**Hypothèse :** (HC.6) Les  $I_k$  sont supposées indépendantes

**Proposition C.1.3.**

1. L'intensité lumineuse  $J = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L I_k$  suit une loi gamma de densité de probabilité :

$$f_J(x) = \left(\frac{L}{\mu_I}\right)^L \frac{1}{\Gamma(L)} x^{L-1} \exp\left(-\frac{Lx}{\mu_I}\right) \mathbf{1}_{x \geq 0} \quad (\text{C.1.15})$$

(on rappelle que  $\mu_I = 2\sigma^2$  et que  $\Gamma(L) = (L-1)!$ ). Elle vérifie :  $\mu_J = 2\sigma^2 = \mu_I$  ,  $\sigma_J = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{L}}$  et  $\gamma_J = \frac{1}{\sqrt{L}}$

2. L'amplitude  $B = \sqrt{J}$  suit une loi gamma généralisée de densité de probabilité :

$$f_B(x) = \frac{2L^L}{\mu_I^L \Gamma(L)} x^{2L-1} \exp\left(-\frac{Lx^2}{\mu_I}\right) \mathbf{1}_{x \geq 0} \quad (\text{C.1.16})$$

Elle vérifie :  $\mu_B = \frac{\Gamma(L+0,5)}{\sqrt{L}\Gamma^2(L)}\sqrt{2}\sigma$  ,  $\sigma_B = \sqrt{1 - \frac{\Gamma^2(L+0,5)}{L\Gamma^2(L)}}\sqrt{2}\sigma$  ,  
 et  $\gamma_B = \sqrt{\frac{L\Gamma^2(L)}{\Gamma^2(L+0,5)}} - 1$ .

**Preuve : Calcul de la densité de probabilité de LJ**

Comme les  $I_k$  sont indépendantes, et que  $LJ = \sum_{k=1}^L I_k$ , on a :

$$\begin{aligned} \chi_{LJ}(t) &= E[e^{itLJ}] \\ &= E[e^{it \sum_{k=1}^L I_k}] \\ &= \prod_{k=1}^L \chi_{I_k}(t) \\ &= \frac{1}{(1 - i\mu_I t)^L} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_{LJ}(x) dx \end{aligned}$$

On rappelle que la transformée de Fourier de  $f$  est donnée par  $\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}dx$ , et on a la formule d'inversion  $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{ixt}dt$  où  $\check{f}(x) = f(-x)$ . Donc

$$\hat{f}_{LJ}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f_{LJ}(-s)ds = \frac{1}{(1 - i\mu_I t)^L} \quad (\text{C.1.17})$$

D'où :

$$\check{f}_{LJ}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_{LJ}(t)e^{ixt}dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{(1 - i\mu_I t)^L} dt \quad (\text{C.1.18})$$

On en déduit :

$$f_{LJ}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt}}{(1 - i\mu_I t)^L} dt \quad (\text{C.1.19})$$

Si  $L \geq 2$ , on obtient en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt}}{(1 - i\mu_I t)^L} dt &= \underbrace{\left[ \frac{e^{-ixt}(1 - it)^{-L+1}}{i\mu_I(L-1)} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-ixe^{-ixt}}{i\mu_I(L-1)} (1 - it\mu_I)^{-L+1} dt \\ &= \frac{x}{\mu_I(L-1)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} (1 - it\mu_I)^{-L+1} dt \\ &= \left( \frac{x}{\mu_I} \right)^{L-1} \frac{1}{(L-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt}}{(1 - i\mu_I t)} dt \end{aligned}$$



Or on sait déjà que :  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt}}{(1 - i\mu_I t)^L} dt = f_I(x) = \frac{1}{\mu_I} e^{-\frac{x}{\mu_I}} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}$ . On en déduit ainsi la densité de probabilité de LJ :

$$f_{LJ}(x) = \left(\frac{x}{\mu_I}\right)^{L-1} \frac{1}{\mu_I(L-1)!} e^{-\frac{x}{\mu_I}} \mathbf{1}_{x \geq 0} \quad (\text{C.1.20})$$

Il existe un lien simple entre  $f_{LJ}$  et  $f_J$  :

$$P(J < j) = P(LJ < Lj) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{LJ}(x) \mathbf{1}_{x < Lj} dx \quad (\text{C.1.21})$$

Et en faisant le changement de variable  $y = \frac{x}{L}$ , on obtient  $P(J < j) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{LJ}(Ly) \mathbf{1}_{y < j} L dy$ . D'où :  $f_J(x) = L f_{LJ}(Lx)$ .

Cela nous permet finalement d'obtenir la densité de probabilité de  $J = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L I_k$ , et donc d'obtenir le premier point de la Proposition C.1.3.

**Calcul de la densité de probabilité de l'amplitude  $B = \sqrt{J}$**

$$P(B < b) = E[\mathbf{1}_{B < b}] = E[\mathbf{1}_{\sqrt{J} < b}] = \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{\sqrt{x} < b} f_J(x) dx \quad (\text{C.1.22})$$

En faisant le changement de variable  $x = y^2$ , on obtient :

$$P(B < b) = \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{y < b} \left(\frac{L}{\mu_I}\right) \frac{1}{\Gamma(L)} y^{2L-2} \exp\left(-\frac{Ly^2}{\mu_I}\right) 2y dy$$

On en déduit la loi de l'amplitude  $B$ , et donc le deuxième point de la Proposition C.1.3. ■

**Nombre de vues équivalentes :** Un paramètre utile pour analyser quantitativement la réduction du speckle est le nombre de vues équivalent :

$$L_{eq} = \frac{1}{\gamma_J^2} \quad (\text{C.1.23})$$

## C.2 . Statistique du speckle non gaussien

Toutes les distributions qui ont été données précédemment ne sont valables que dans le cas du speckle totalement développé et pour des zones homogènes (coefficient de rétrodiffusion constant), c'est-à-dire sans texture.

Plusieurs démarches sont possibles pour généraliser ce modèle. Le speckle est alors encore totalement développé, mais une variation naturelle de la scène est prise en compte.

Dans la suite, nous appellerons désormais l'intensité de l'image L-vues.

### C.2.1 En utilisant la formule de Bayes

Une méthode proposée par Lewinsky consiste à reprendre la loi de l'intensité  $f_I$  (cf (C.1.15)) en la considérant comme fonction du paramètre  $\mu_I = 2\sigma^2$ . La loi (C.1.15) est donc maintenant celle de  $I|\mu_I$ . En appliquant la formule de Bayes, on obtient :

$$f_I(i) = \int f_I(i|x) f_{\mu_I}(x) dx \quad (\text{C.2.1})$$

Plusieurs modèles de loi sont alors possibles pour  $\mu_I$ . Dans le cas où  $\mu_I$  suit une loi gamma [161], on trouve pour  $I$  une loi  $K$ .

$$f_{\mu_I}(x) = \frac{m^m x^{m-1} e^{-\frac{mx}{\mu_I}}}{\Gamma(m) \bar{\mu}_I^m} \quad (\text{C.2.2})$$

$$f_I(x) = \frac{2(Lm)^{\frac{L+m}{2}} x^{\frac{L+m-2}{2}}}{\Gamma(L)\Gamma(m)\bar{\mu}_I^{\frac{L+m}{2}}} K_{m-L} \left( \sqrt{\frac{4Lmx}{\bar{\mu}_I}} \right) \quad (\text{C.2.3})$$

La distribution  $K$  est l'une des plus utilisées pour modéliser la rétro-diffusion dans l'image radar. Elle permet de tenir compte d'une variation de l'intensité moyenne, et ainsi d'introduire la notion de texture.

## C.2.2 Le modèle du bruit multiplicatif

Une autre démarche pour étudier la distribution de l'image RSO en présence de texture consiste à faire une modélisation multiplicative de l'image [161, 141, 162], sous la forme  $I = RS$ , où  $I$  est l'intensité lumineuse observée,  $R$  la réflectivité de la scène, et  $S$  le speckle. On suppose de plus que  $R$  et  $S$  sont indépendantes. On a donc :

$$f_{R,S}(r, s) = f_R(r)f_S(s) \quad (\text{C.2.4})$$

$$\begin{aligned} P(I < i) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{x < i} f_I(x) dx \\ &= P(RS < i) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{rs < i} f_{R,S}(r, s) dr ds \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{rs < i} f_R(r) f_S(s) dr ds \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{x < i} f_R(r) f_S\left(\frac{x}{r}\right) \frac{dx dr}{r} \end{aligned}$$

(on a fait le changement de variable :  $x = rs$  et  $r = r$  dont le Jacobien vaut :  $\frac{1}{r}$ ).

On obtient ainsi :

$$f_I(i) = \int_{\mathbb{R}} f_R(r) f_S\left(\frac{i}{r}\right) \frac{dr}{r} \quad (\text{C.2.5})$$

Or, d'après la formule de Bayes :

$$f_I(i) = \int_{\mathbb{R}} f_R(r) f_{I|R}(i|r) dr \quad (\text{C.2.6})$$

Nécessairement, on a l'égalité des deux intégrales précédentes pour tout  $i$ . Pour cela, il est suffisant d'avoir :

$$f_S\left(\frac{i}{r}\right) \frac{1}{r} = f_{I|R}(i|r) \quad (\text{C.2.7})$$

**Remarque :** Si on prend  $R = \mu_I$ , on retrouve exactement le modèle précédent.

Dans le cadre du modèle multiplicatif  $I = RS$ ,  $S$  est en fait le speckle “normalisé” : il suit une loi gamma de moyenne 1 :

$$f_S(s) = \frac{L^L}{\Gamma(L)} s^{L-1} e^{-Ls} \mathbf{1}_{s \geq 0} \quad (\text{C.2.8})$$

On a ainsi :

$$f_S\left(\frac{i}{r}\right) \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{L^L}{\Gamma(L)} \frac{i^{L-1}}{r^{L-1}} e^{-\frac{Li}{r}} \quad (\text{C.2.9})$$

Or d’après (C.1.15) (en prenant  $R = \mu_I$ ) :

$$f_{I|R}(i|r) = \frac{L^L}{r^L \Gamma(L)} i^{L-1} e^{-\frac{Li}{r}} \quad (\text{C.2.10})$$

La condition suffisante (C.2.7) est alors vérifiée.

**Remarque :** On peut évidemment mener le même raisonnement en amplitude.

## C.3 . Quelques filtres de speckle

Nous nous inspirons ici de la présentation de [161].

Un filtre idéal doit répondre aux trois objectifs suivants :

- Eliminer le speckle, donc lisser le plus possible les zones homogènes.
- Conserver et rehausser les structures de l’image (lignes, contours, très forts réflecteurs...).
- Préserver la texture de la scène.

### C.3.1 Les filtres non spécifiques

Ce sont les filtres qui ne prennent pas en compte les statistiques des images radar.

- **Le filtre de moyenne :** Les zones homogènes sont bien lissées, mais les contours sont rendus flous.
- **Le filtre médian :** Les contours sont préservés, mais les zones homogènes sont moins bien lissées.
- **Le filtre de Crimmins [67] :** C’est un filtre géométrique. Il est basé sur l’application d’une seule itération d’un algorithme d’enveloppe convexe itératif, alternativement à l’image (pour augmenter les valeurs trop basses) et à son complémentaire (pour diminuer les valeurs trop hautes).

### C.3.2 Les filtres adaptatifs

Ils évaluent localement des statistiques du premier ordre (moyenne, écart type) qui sont ensuite intégrées dans la formule de filtrage.

Le modèle couramment utilisé est le modèle multiplicatif de la forme  $I = RS$ , où  $I$  représente l’intensité de l’image,  $R$  la réflectivité, et  $S$  le speckle normalisée (cf (C.2.8)). On cherche à estimer  $R$ . On suppose que  $R$  et  $S$  sont indépendantes.

**Filtre de Lee :** On fait de plus l'hypothèse suivante :

$$(R - \bar{R})(S - \bar{S}) \approx 0 \quad (\text{C.3.1})$$

Cela revient en fait “à linéariser” le problème [168]. En effet :

$$RS - (\bar{S}R + \bar{R}(S - \bar{S})) = (R - \bar{R})(S - \bar{S}) \approx 0 \quad (\text{C.3.2})$$

Donc on obtient l'équation :

$$I = \bar{S}R + \bar{R}(S - \bar{S}) = R + \bar{R}(S - 1) \quad (\text{C.3.3})$$

La formule de filtrage est alors obtenue en minimisant l'erreur quadratique moyenne (EQM) et en cherchant une solution linéaire :

$$\hat{R}_s = \bar{I}_s + k_s(I_s - \bar{I}_s) \quad (\text{C.3.4})$$

où  $\hat{R}$  est l'estimation de la réflectivité, et l'indice  $s$  représente le pixel considéré ( $\bar{I}_s$  et  $\gamma_{I_s}$  sont calculées sur un voisinage centré sur le pixel  $s$ ). On trouve :

$$k_s = 1 - \frac{\gamma_s^2}{\gamma_{I_s}^2} \quad (\text{C.3.5})$$

**Filtre de Kuan :** On cherche une solution de la même forme que précédemment, mais sans faire l'approximation  $(R - \bar{R})(S - \bar{S}) \approx 0$ . La valeur de  $k_s$  est alors [140] :

$$k_s = \frac{1 - \frac{\gamma_s^2}{\gamma_{I_s}^2}}{1 + \gamma_s^2} \quad (\text{C.3.6})$$

**Amélioration du calcul des statistiques :** La taille et la forme de la fenêtre de calcul des statistiques sont des paramètres primordiaux pour tous les filtres précédents. Celles-ci doivent répondre à deux contraintes antagonistes : d'une part, le calcul doit s'effectuer sur des pixels appartenant à la même région physique que le pixel considéré ; d'autre part, le nombre de pixels utilisés pour le calcul doit être le plus grand possible.

Une solution est apportée par **le filtre de Wu et Maître [168] :**

Ce dernier consiste à rechercher en un pixel la plus grande fenêtre homogène à laquelle appartient ce pixel. La méthode utilisée est une technique de croissance de régions. La croissance est effectuée en fonction de la variation de l'écart-type.

### C.3.3 Les filtres adaptatifs avec modélisation de la scène

De nombreux filtres modélisent la réflectivité de la scène (comme par exemple le filtre de **Frost**). Le critère utilisé est celui du Maximum a posteriori (MAP).

#### Une méthode Markovienne

Dans [161], F. Tupin propose un filtre de speckle basé sur une approche Markovienne.

**Notations :**

- Soit  $f$  l'image de départ (non bruitée) en amplitude.
- Soit  $p$  l'observation bruitée de cette image.

Le critère utilisé est celui du Maximum a posteriori (MAP).

Le problème consiste à minimiser l'énergie :

$$U(f) = -\ln(Pr(F = f|P = p)) \quad (\text{C.3.7})$$

Ceci est équivalent à minimiser :

$$U(f, b) = U_1(f) + \sum_{(r,s) \in \mathcal{C}} b_{rs} \mathcal{H}(f_r, f_s) + \sum_{(r,s) \in \mathcal{C}} \psi(b_{rs}) \quad (\text{C.3.8})$$

$\mathcal{C}$  représente l'ensemble des sites de l'image, et  $b_{rs}$  le processus bord entre les sites  $r$  et  $s$ .  $\mathcal{H}(f_r, f_s)$  est un détecteur de bord et  $\psi(b_{rs})$  le poids d'introduction d'un bord.

$U_1(f)$  est le terme d'attache aux données :

$$U_1(f) = \sum_{s \in \mathcal{C}} -\ln(Pr(P_s = p_s|F_s = f_s)) \quad (\text{C.3.9})$$

Les meilleurs résultats sont obtenus pour une distribution gamma généralisée et une fonction  $\mathcal{H}$  adaptée (de sorte que la régularisation ait lieu de la même façon dans les zones sombres et brillantes).

$$\mathcal{H}(x) = x + \frac{1}{x} - 2 \quad (\text{C.3.10})$$

où  $x = \frac{f_r}{f_s}$

Finalement, l'énergie à minimiser est la suivante :

$$U(f) = L \left( \sum_{s \in \mathcal{C}} 2 \ln f_s + \frac{p_s^2}{f_s^2} \right) + \lambda \sum_{(r,s) \in \mathcal{C}} b_{rs} \left( \frac{f_r}{f_s} + \frac{f_s}{f_r} - 2 \right) + \mu \sum_{(r,s) \in \mathcal{C}} \psi(b_{rs}) \quad (\text{C.3.11})$$

### C.3.4 Le filtrage multi-temporel

Cela consiste à utiliser plusieurs images d'une même région et à les fusionner. C'est la technique la plus prometteuse, mais aussi la plus coûteuse (il est en effet nécessaire d'avoir plusieurs images de la même zone).

- La méthode la plus simple consiste à faire une moyenne des différentes images.

$$I = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_i \quad (\text{C.3.12})$$

On constate effectivement une réduction du speckle, d'autant plus importante que les images sont décorréliées.

- Une méthode plus subtile consiste à faire une sommation pondérée des différentes images.

$$I = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha_i I_i \quad (\text{C.3.13})$$

avec  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$

C'est le principe du filtre de **Bruniquel** [43, 44, 45].

Il existe d'autres raffinements possibles pour augmenter la réduction du speckle.

# Annexe D

## Contours actifs et courbes de niveaux

### D.1 . Introduction

Un objectif important en traitement d'images est de pouvoir déterminer les contours d'objets 2D ou 3D.

Pour cela, un moyen efficace consiste à utiliser la méthode des contours actifs. On fait évoluer une courbe (un snake) autour (ou à l'intérieur) de l'objet à détecter. Ce snake va progressivement se "coller" sur le contour à détecter.

L'idée fondamentale (introduite par Osher et Sethian) est de considérer le snake comme la courbe de niveau zéro d'une fonction  $u$  de dimension supérieure.

### D.2 . Rappels de Géométrie différentielle

Nous nous inspirons ici de [17].

Soit  $X(p) = (x_1(p), x_2(p))$  une courbe plane paramétrée ( $p \in [0, 1]$ ).

#### Notations

- Vecteur tangent :  $\vec{\tau}(p) = (x'_1(p), x'_2(p))$
- Vecteur normal (extérieur) :  $\vec{\mathcal{N}}(p) = (-x'_2(p), x'_1(p))$
- Abcisse curviligne :  $s(p) = \int_0^p \|\vec{\tau}(q)\| dq$
- Courbure :  $\kappa$

#### Courbes de niveau

Supposons que la courbe  $X(s)$  paramétrée par son abscisse curviligne soit la courbe de niveau  $r$  d'une fonction  $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ .  $X = \{(x_1, x_2) / u(x_1, x_2) = r\}$  Alors :

- Vecteur normal extérieur :  $\nabla u$
- Courbure :  $\kappa = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right)$

#### Evolution de courbes

Supposons maintenant que :

- $X(p)$  dépend d'un paramètre  $t \geq 0$ .  $\Rightarrow X(p, t)$

- $X$  est fermée :  $X(0, t) = X(1, t)$
- $\frac{\partial X}{\partial p}(0, t) = \frac{\partial X}{\partial p}(1, t)$

Soit

$$L(t) = \int_0^1 \left\| \frac{\partial X}{\partial p}(p, t) \right\| dp = \text{longueur de } X(p, t) \quad (\text{D.2.1})$$

La décroissance de  $L(t)$  est maximum quand :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \kappa \vec{\mathcal{N}} \quad (\text{D.2.2})$$

Il est possible d'introduire un poids positif  $\phi$  dans l'intégrale de longueur :

$$L(t) = \int_0^1 \phi \left\| \frac{\partial X}{\partial p} \right\| dp \quad (\text{D.2.3})$$

La décroissance de  $L(t)$  est maximum quand :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = (\phi \kappa - \nabla \phi \cdot \vec{\mathcal{N}}) \vec{\mathcal{N}} \quad (\text{D.2.4})$$

### Version courbes de niveaux

Supposons que l'on ait un flot général :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = F \vec{\mathcal{N}} \quad (\text{D.2.5})$$

où  $F = F(X, X', X'')$  et  $X = \{(x_1, x_2) / u(x_1, x_2) = r\}$

Alors,  $u$  suit l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F \|\nabla u\| \quad (\text{D.2.6})$$

## D.3 . Applications aux images

### Préliminaires

L'objectif est de détecter un contour fermé  $\Gamma$  dans une image.

On part d'une "grande" courbe fermée  $X_0(p) = X(p, t = 0)$  entourant  $\Gamma$ , et on fait évoluer  $X$  selon une équation d'évolution du type de celles calculées dans la Section D.2, de sorte que  $X(p, t)$  vienne converger vers  $\Gamma$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

Notons  $I$  l'intensité (préalablement lissée) de l'image.

On considère un contour  $\Gamma$  comme étant :

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) / \|\nabla I\|(x_1, x_2) = +\infty\} \quad (\text{D.3.1})$$

soit encore :

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) / g(\|\nabla I\|(x_1, x_2)) \simeq 0\} \quad (\text{D.3.2})$$

où  $g$  est typiquement de la forme :

$$g(t) = \frac{1}{1 + t^2} \quad (\text{D.3.3})$$

## L'équation d'évolution

Considérons l'équation (D.2.4) en prenant  $\phi(x_1, x_2) = g(\|\nabla I\|(x_1, x_2))$ .  $\phi$  est donc un terme d'arrêt du contour actif sur le contour  $\Gamma$  à détecter.

Nous obtenons alors (à l'aide de la version courbes de niveaux de l'équation) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(\|\nabla I\|(x)) \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) \|\nabla u\| + \nabla g \cdot \nabla u \quad (\text{D.3.4})$$

avec  $\vec{\mathcal{N}} = -\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$  et  $k = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right)$ .

De plus, pour accélérer la convergence du snake et aussi pour pouvoir détecter les parties concaves, on ajoute à la courbure  $\kappa$  une constante  $c$  (appelée force ballon) de sorte que  $\kappa+c$  garde un signe constant.

Nous obtenons ainsi le modèle final suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(\|\nabla I\|(x)) \|\nabla u\| (\kappa + c) + \nabla g \cdot \nabla u \quad (\text{D.3.5})$$

avec  $u(x, t=0) = u_0(x)$  et où on choisit par exemple  $u_0(x) = \text{distance}(x, X_0)$

## Explosion de $\nabla u$ , et les méthodes pour y remédier

Pour calculer  $u$ , c'est donc l'équation (D.3.5) qui est utilisée. Malheureusement, on constate numériquement que  $\nabla u$  explose rapidement [90]. De plus les erreurs numériques sont importantes au voisinage du squelette.

Pour pallier cet inconvénient, on réinitialise périodiquement  $u$  en la fonction distance signée (de manière à avoir  $\|\nabla u\|=1$ ). Une méthode efficace consiste à appliquer à  $u$  l'équation (cf [148, 158, 146, 1]) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{signe}(u_0)(\|\nabla u\| - 1) = 0 \quad (\text{D.3.6})$$

Nous avons étudié cette équation en détails dans la Section 9.3 (cf en particulier le Théorème 9.3.1).

De plus, pour diminuer les temps de calcul, on a souvent recours à la méthode de la bande étroite [122] : cela consiste à ne calculer les valeurs de  $u$  qu'au voisinage de la courbe de niveau  $\{u=0\}$ , dans un tube que l'on déplace pendant les phases de réinitialisation.





# Publications, conférences, séminaires

## Rapports de recherche :

- Rapport de recherche INRIA 4507 : “Signed distance functions and viscosity solutions of discontinuous Hamilton-Jacobi Equations” (avec Gilles Aubert).
- Rapport de recherche INRIA 4640 : “Supervised classification for textured images” (avec Gilles Aubert et Laure Blanc-Féraud).
- Rapport de recherche INRIA 4704 : “Image decomposition : application to textured images and SAR images” (avec Gilles Aubert, Laure Blanc-Féraud et Antonin Chambolle).
- Rapport de recherche INRIA 4878 : “Modeling very oscillating signals. Application to image processing” (avec Gilles Aubert).
- Rapport de recherche INRIA 5076 : “Structure and texture compression” (avec Basarab Matei).
- Rapport de recherche INRIA 5130 : “Dual norms and Image decomposition models” (avec Antonin Chambolle).

## Articles de revues :

- "Wavelet-based level set evolution for classification of textured images", Jean-François Aujol, Gilles Aubert et Laure Blanc-Féraud, IEEE Transactions on image processing, volume 12, numéro 12, pages 1634-1641, décembre 2003.
- "Image decomposition into a bounded variation component and an oscillating component", Jean-François Aujol, Gilles Aubert, Laure Blanc-Féraud et Antonin Chambolle, à paraître dans JMIV.
- “Dual norms and Image decomposition models”, Jean-François Aujol et Antonin Chambolle, à paraître dans IJCV.
- “Optimal partitions, regularized solutions, and application to image classification”, Gilles Aubert et Jean-François Aujol, à paraître dans Applicable Analysis.

## Conférences internationales :

- ACIVS 2004 à Bruxelles du 31 août au 3 septembre 2004 : “Simultaneous structure and texture compact representation”, Jean-François Aujol et Basarab Matei.
- ICIP’03 à Barcelone du 14 au 17 septembre 2003 : "Wavelet-based level set evolution for classification of textured images", Jean-François Aujol, Gilles Aubert et Laure Blanc-Féraud.
- Scale-Space’03 en Ecosse (Ile de Skye) du 10 au 12 juin 2003 : "Image decomposition. Application to SAR images." (LNCS 2695), Jean-François Aujol, Gilles Aubert, Laure Blanc-Féraud et Antonin Chambolle.
- Workshop on Hamilton-Jacobi Equations à Cortona (Italie) du 24 au 28 juin 2002 : "Signed distance functions and discontinuous Hamilton-Jacobi Equations", Jean-François

**Conférences nationales :**

- CANUM 2004 (du 31 mai au 4 juin 2004) à Obernai : "Classification d'images texturées par contours actifs et ondelettes".
- GRETSI'03 (du 8 au 11 septembre 2003) à Paris : "Décomposition d'images. Application aux images RSO."
- CANUM 2003 (du 2 au 6 juin 2003) à La Grande Motte : "Modélisation de signaux oscillants en imagerie numérique".
- CANUM 2002 (du 27 au 31 mai 2002) à Anglet : "Distances signées et solutions de viscosité pour une classe d'équations de Hamilton-Jacobi discontinues".

**Autres séminaires :**

- Séminaire EDP/Analyse numérique du Laboratoire J.A. Dieudonné (Nice) le 5 février 2004 : "Décomposition d'image et applications"
- Journée texture du GDR-PRC ISIS à Paris le 5 juin 2003 : "Décomposition d'image et classification d'images texturées".
- Séminaire croisé Ariana-Odyssée le 31 mars 2003 à Sophia-Antipolis : "Prise en compte de la texture en traitement d'images et problèmes mathématiques associés".
- Séminaire étudiant au MIP à l'Université Paul Sabatier Toulouse 3 le 14 mai 2002 : "Fonctions distances signées et solutions de viscosité d'équations de Hamilton-Jacobi discontinues".

# Bibliographie

- [1] D. Adalsteinsson and J.A. Sethian. The fast constructions of extension velocities in level set methods. *Journal of Computational Physics*, 148 :2–22, 1999.
- [2] R. Adams. *Sobolev Spaces*. Pure and applied Mathematics. Academic Press, Inc, 1975.
- [3] L. Alvarez, Y. Gousseau, and J.M. Morel. Scales in natural images and a consequence on their bounded variation norm. In *Scale-Space '99*, volume 1682 of *Lecture Notes in Computer Science*, 1999.
- [4] O. Alvarez, E.N. Barron, and H. Ishii. Hopf-Lax formulas for semicontinuous data. *Indiana University Mathematics Journal*, 48(3) :993–1035, 1999.
- [5] S. Amat, F. Arandiga, A. Cohen, R. Donat, G. Garcia, and M. Von Oehsen. Data compression with ENO schemes : a case study, November 2002. *Appl.Comput.Harmon.Anal*,11,273-288.
- [6] L. Ambrosio. Corso introduttivo alla teoria geometrica della misura ed alle superfici minime, 1997. Scuola Normale Superiore Lecture Notes, Pisa.
- [7] L. Ambrosio, V. Caselles, S. Masnou, and J.M. Morel. Connected components of sets of finite perimeter and applications to image processing, 1999.
- [8] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara. *Functions of bounded variations and free discontinuity problems*. Oxford mathematical monographs. Oxford University Press, 2000.
- [9] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles, and J.M. Mazón. Minimizing total variation flow, 1998.
- [10] H.C. Andrews and B.R. Hunt. *Digital Image Restoration*. Prentice-Hall, 1977.
- [11] F. Arandiga, A. Cohen, M. Doblas, R. Donat, and B. Matei. Sparse representations of images by edge adapted nonlinear multiscale transforms, September 2003. IEEE ICIP Conference Barcelona.
- [12] G. Aubert and J.F. Aujol. Signed distance functions and viscosity solutions of discontinuous hamilton-jacobi equations. Technical Report 4507, INRIA, July 2002.
- [13] G. Aubert and J.F. Aujol. Modeling very oscillating signals. Application to image processing, 2003. INRIA Research Report 4878, submitted, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4878.html>.
- [14] G. Aubert and J.F. Aujol. Optimal partitions, regularized solutions, and application to image classification, 2004. To appear in *Applicable Analysis*.
- [15] G. Aubert and L. Blanc-Feraud. Some remarks on the equivalence between 2d and 3d classical snakes and geodesic active contours. *IJCV*, 34(1) :19–28, 1999.
- [16] G. Aubert, L. Blanc-Féraud, and R. March. Gamma-convergence of discrete functionals with non convex perturbation for image classification, 2002.

- [17] G. Aubert and P. Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing*, volume 147 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 2002.
- [18] G. Aubert and L. Vese. A variational method in image recovery. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 34 :1948–1979, 1997.
- [19] J.F. Aujol. Modélisation de signaux oscillants en imagerie numérique, 2003. Canum '03, La Grande Motte.
- [20] J.F. Aujol. Classification d'images texturées par contours actifs et ondelettes, 2004. Canum '04, Obernai.
- [21] J.F. Aujol and G. Aubert. Distances signées et solutions de viscosité pour une classe d'équations de Hamilton-Jacobi discontinues, 2002. Canum '02, Anglet.
- [22] J.F. Aujol and G. Aubert. Signed distance functions and discontinuous Hamilton-Jacobi equations, June 2002. Workshop on Hamilton-Jacobi Equations, Cortona (Italy), TMR Viscosity Solutions and their Applications.
- [23] J.F. Aujol, G. Aubert, and L. Blanc-Féraud. Wavelet-based level set evolution for classification of textured images. In *ICIP '03*, 2003.
- [24] J.F. Aujol, G. Aubert, L. Blanc-Féraud, and A. Chambolle. Decomposing an image : Application to SAR images. In *Scale-Space '03*, volume 1682 of *Lecture Notes in Computer Science*, 2003.
- [25] J.F. Aujol, G. Aubert, L. Blanc-Féraud, and A. Chambolle. Decomposing an image : Application to textured images and SAR images, 2003. INRIA Research Report 4704, to appear in JMIV, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4704.html>.
- [26] J.F. Aujol, G. Aubert, L. Blanc-Féraud, and A. Chambolle. Décomposition d'images. Application aux images RSO. In *Gretsi '03*, 2003.
- [27] J.F. Aujol, G. Aubert, and L. Blanc-Féraud. Wavelet-based level set evolution for classification of textured images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(12) :1634–1641, 2003.
- [28] J.F. Aujol and A. Chambolle. Dual norms and image decomposition models, 2004. INRIA Research Report 5130, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-5130.html>, to appear in IJCV.
- [29] J.F. Aujol and B. Matei. Simultaneous structure and texture compact representation. In *ACIVS 2004*, September 2004.
- [30] J.F. Aujol and B. Matei. Structure and texture compression, 2004. INRIA Research Report 5076, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-5076.html>.
- [31] M. Bardi and L.C. Evans. On Hopf's formulas for solutions of Hamilton-Jacobi equations. *NonLinear Analysis, Theory, Methods, Applications*, 8(11) :1373–1381, 1984.
- [32] M. Bardi and S. Faggian. Hopf-type estimate and formulas for nonconvex nonconcave Hamilton-Jacobi equations. *J. Math. Anal.*, 29(5) :1067–1086, September 1998.
- [33] G. Barles. *Solutions de Viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*. Springer-Verlag, 1987.
- [34] G. Barles, H.M. Soner, and P.E. Souganidis. Front propagation and phase field theory. *SIAM J. Control and Optimization*, 31(1) :439–469, march 1993.
- [35] J. Bect, G. Aubert, L. Blanc-Féraud, and A. Chambolle. A  $l^1$  unified variational framework for image restoration. In *ECCV 2004*, May 2004.

- [36] M. Bertalmio, L. Vese, G. Sapiro, and S. Osher. Simultaneous structure and texture image inpainting. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(8) :882–889, 2003.
- [37] M. Berthod, Z. Kato, S. Yu, and J. Zerubia. Bayesian image classification using Markov random fields. *Image and Vision Computing*, 14(4) :285–293, 1996.
- [38] C. Bouman. Multiple resolution segmentation of textured images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(2) :99–113, July 1995.
- [39] C.A. Bouman and M. Shapiro. A multiscale random field model for Bayesian image segmentation. *IEEE Trans. on Image Precessing*, 3 :162–177, 1994.
- [40] J. Bourgain and H. Brezis. On the equation  $\operatorname{div} y=f$  and application to control of phases, October 2002. R02022, Laboratoire J.L. Lions, Université Paris 6, <http://www.ann.jussieu.fr/publications/2002.php3>.
- [41] J. Bourgain and H. Brezis. Sur l'équation  $\operatorname{div} u=f$ . *C.R.Math.Acad.Sci.Paris*, 334(11) :973–976, 2002.
- [42] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, 1983.
- [43] J. Bruniquel and A. Lopes. Analysis and enhancement of multi-temporal sar data. In *SPIE*, volume 2315, pages 342–353, Septembre 1994.
- [44] J. Bruniquel and A. Lopes. Improvement of classifier and change detection tools in multi-temporal SAR images. In *IGARSS'95*, volume 2, pages 1156–1158, 1995.
- [45] J. Bruniquel, A. Lopes, J.G. Planes, F. Cazaban, and M. Deschaux-Beaume. On the use of the whitening filter and optimal intensity summation to produce multi-look SAR images. In *IGARSS'96*, volume 1, pages 387–389, 1996.
- [46] E. Candès and D. Donoho. A surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges, November 1999. Curves and Surfaces, L. L. Schumaker et al. (eds), Vanderbilt University Press, Nashville, TN.
- [47] V. Caselles, F. Catte, T. Coll, and F. Dibos. A geometric model for active contours. *Numerische Mathematik*, 66 :1–31, 1993.
- [48] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic active contours. *IJCV*, 22(1) :61–79, 1997.
- [49] A. Chambolle. An algorithm for total variation minimization and applications. *JMIV*, 20 :89–97, 2004.
- [50] A. Chambolle and P.L. Lions. Image recovery via total variation minimization and related problems. *Numerische Mathematik*, 76(3) :167–188, 1997.
- [51] A. Chambolle, R.A. DeVore, N. Lee, and B.J. Lucier. Nonlinear wavelet image processing : Variational problems, compression, and noise removal through wavelet shrinkage. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3) :319–335, March 1998.
- [52] T.F. Chan and L.A. Vese. Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(2) :266–77, February 2001.
- [53] T. Chang and C.C.J. Kuo. Texture analysis and classification with tree-structured wavelet transform. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2(4) :429–441, October 1993.
- [54] J.L. Chen and A. Kundu. Rotation and gray scale transform invariant texture identification using wavelet decomposition and hidden Markov model. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16(2) :208–214, February 1994.

- [55] H. Choi and R. Baraniuk. Interpolation and denoising of nonuniformly sampled data using wavelet-domain processing. In *SPIE*, 1999.
- [56] H. Choi and R. Baraniuk. Multiple basis wavelet denoising using Besov projections. In *ICIP*, 1999.
- [57] H. Choi and R. Baraniuk. Information-theoretic interpretation of Besov spaces. In *SPIE*, 2000.
- [58] H. Choi and R.G. Baraniuk. Multiscale image segmentation using wavelet-domain hidden Markov models. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(9) :1309–1321, September 2001.
- [59] A. Cohen. *Numerical analysis of wavelet methods*. Elsevier, 2003.
- [60] A. Cohen and B. Matei. Compact representations of images by edge adapted multiscale transforms, September 2001. IEEE ICIP Conference Thessalonikki.
- [61] A. Cohen and B. Matei. Nonlinear subdivisions schemes : applications to image processing, July 2002. Tutorial on multiresolution in geometric modelling, A. Iske, E. Quack and M. Floater eds., Springer.
- [62] P.L. Combettes. Convexité et signal. In *Actes du Congrès de Mathématiques Appliquées et Industrielles SMAI'01*, pages 6–18, 2001.
- [63] P.L. Combettes and J.C. Pesquet. Image restoration subject to a total variation constraint. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13, 2004.
- [64] G. Congedo and I. Tamanini. On the existence of solutions to problem in multidimensional segmentation. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 8(2) :175–195, 1991.
- [65] M.G. Crandall. Viscosity solutions : a primer. In *Viscosity Solutions and Applications*, volume 1660 of *Lecture notes in Mathematics*. Springer, 1997.
- [66] M.G. Crandall, H. Ishii, and P.L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27(1) :1–67, july 1992.
- [67] T.R. Crimmins. Geometric filter for reducing speckle. *Optical Engineering*, 25(5) :651–654, May 1986.
- [68] M.S. Crouse, R.D. Nowak, and R.G. Baraniuk. Wavelet-based statistical signal processing using hidden Markov models. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(4) :886–902, April 1998.
- [69] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. SIAM, 1992.
- [70] R. Dautray and J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, volume 4. Masson, 1988.
- [71] G. Van de Wouwer, P. Scheunders, and D. Van Dyck. Statistical texture characterisation from discrete wavelet representation. *IEEE IP*, 8(4) :592–598, 1999.
- [72] X. Descombes, R. Morris, and J. Zerubia. Some improvements to Bayesian image segmentation. part one : modelling. (in french). *Traitement du Signal*, 14(4) :373–382, 1997.
- [73] X. Descombes, R. Morris, and J. Zerubia. Some improvements to Bayesian image segmentation. part two : classification. (in french). *Traitement du Signal*, 14(4) :383–395, 1997.

- [74] F. Dibos. Restauration d'images par minimisation de fonctionnelle, 1999.
- [75] M. Do and M. Vetterli. The finite ridgelet transform for image representation., November 2001. Technical Report DSC/2001/019, Communication Systems Department, EPFL (Switzerland).
- [76] D.L. Donoho and M. Johnstone. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *Journal of the American Statistical Association*, 90(432) :1200–1224, December 1995.
- [77] D. Dunn and W.E. Higgins. Optimal Gabor filters for texture segmentation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(7) :947–964, July 1995.
- [78] I. Ekeland and R. Temam. *Analyse convexe et problèmes variationnels*, volume 224 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Dunod, second edition, 1983.
- [79] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 1991.
- [80] L.C. Evans and R.F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*, volume 19 of *Studies in Advanced Mathematics*. CRC Press, 1992.
- [81] L.C. Evans and P.E. Souganidis. Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations. *Indiana University Mathematics Journal*, 33(5) :773–797, September-October 1984.
- [82] N. Fatemi-Ghomi, P.L. Palmer, and M. Petrou. Performance evaluation of texture segmentation algorithms based on wavelets. In *Workshop on Performance Characteristics of Vision Algorithms*, April 1996. Cambridge.
- [83] W. Feller. *Probability Theory and its Applications*, volume 1. John Wiley and Sons, 1968.
- [84] W. Feller. *Probability Theory and its Applications*, volume 2. John Wiley and Sons, 1971.
- [85] R. Fjortoft, A. Lopes, P. Marthon, and E. Cubero-Castan. An optimal multiedge detector for SAR image segmentation. *IEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 36(3) :793–802, May 1998.
- [86] M. Garavello and P. Soravia. Optimality principles and uniqueness for Bellman equations of unbounded control problems with discontinuous running cost. Preprint, Università di Padova, 2001.
- [87] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, volume 28 of *Princeton Mathematical Series*. Springer-Verlag, 1970.
- [88] J. Gilles and J.F. Aujol. Coherent image restoration using image decomposition, 2004. soumis.
- [89] E. Giusti. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*. Birkhauser, 1994.
- [90] J. Gomes and O. Faugeras. Reconciling distance functions and level sets. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 11 :209–223, Avril 1999.
- [91] J.W. Goodman. Some fundamental properties of speckle. *Optical Society of America*, 66(11) :1145–1150, November 1976.
- [92] J.W. Goodman. *Statistical Properties of Laser Speckle Patterns*, volume 11 of *Topics in Applied Physics*. Springer-Verlag, second edition, 1984.



- [93] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, volume 24 of *Monographs and studies in Mathematics*. Pitman, 1985.
- [94] F. Guichard and J.M. Morel. Image iterative smoothing and P.D.E.'s, 1999.
- [95] A. Harten. Discrete multiresolution analysis and generalized wavelets, December 1993. *Journal of Applied Numerical Mathematics*, 12 :153-193.
- [96] D.J. Heeger and J.R. Bergen. Pyramid based texture analysis/synthesis. In *Computer Graphics Proceedings*, pages 229–238, 1995.
- [97] J.B. Hiriart-Urruty and C. Lemarechal. *Convex Analysis and Minimisation Algorithms I*, volume 305 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1993.
- [98] H. Ishii. Uniqueness of unbounded viscosity solution of Hamilton-Jacobi equations. *Indiana University Mathematics Journal*, 33(5) :721–748, September-October 1984.
- [99] H. Ishii. Existence and uniqueness of solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Funkcialaj Ekvacioj*, 29 :167–188, 1986.
- [100] H. Ishii and M. Ramaswamy. Uniqueness results for a class of Hamilton-Jacobi equations with singular coefficients. *Communications in Partial Differential Equations*, 20(11) :2187–2213, 1995.
- [101] D.C. Munson Jr and R.L. Visentin. A signal processing view of strip-mapping synthetic aperture radar. *IEEE Transactions on acoustics, speech, and signal processing*, 37(12) :2131–2147, December 1989.
- [102] B. Julesz. Texton gradients : The texton theory revisited. *Biological Cybernetics*, 54 :245–251, 1986.
- [103] Z. Kato. *Modélisation markoviennes multirésolutions en vision par ordinateur. Application à la segmentation d'images SPOT*. PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, 1994. (in French and English).
- [104] G. Koepfler, C. Lopez, and J.M. Morel. A multiscale algorithm for image segmentation by variational method. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 31(1) :282–299, February 1994.
- [105] O.A. Ladyzenskaja and N.N. Ural'Ceva. *Equations aux dérivées partielles de type elliptique*. Monographies universitaires de Mathématiques. Dunod, 1968.
- [106] O.A. Ladyzenskaja and N.N. Ural'Ceva. Local estimates for gradients of solutions of non-uniformly elliptic and parabolic equations. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 23 :677–703, 1970.
- [107] A. Laine and J. Fan. Texture classification by wavelet packet signatures. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11 :1186–1190, 1993.
- [108] S. Lakshmanan and H. Derin. Simultaneous parameter estimation and segmentation of Gibbs random fields using simulated annealing. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11 :799–813, August 1989.
- [109] L.S. Lasdon. *Optimization Theory for Large Systems*. Macmillan Series in Operations Research, 1970.
- [110] C. Lemarechal, R. Fjortoft, P. Marthon, E. Cubero-Castan, and A. Lopes. SAR image segmentation by morphological methods. In *Proc. SAR Image Analysis, Modelling, and Technique III*. SPIE, September 1998.

- [111] E. Lepennec. Bandelettes et représentations géométriques des images, December 2002. Ph. D. Thesis, Ecole Polytechnique, Paris.
- [112] D. Leporini and J.C. Pesquet. Bayesian wavelet denoising : Besov priors and non-gaussian noises. *Signal Processing*, 81 :55–67, 2001.
- [113] Henderson Lewis. *Principle and applications of imaging radar*, volume 2 of *Manual of Remote Sensing*. J.Wiley and Sons, third edition, 1998.
- [114] J.L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes*, volume 1. Dunod, 1968.
- [115] P.L. Lions. *General Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, volume 69 of *Research Notes in Mathematics in Mathematics*. Pitman Publishing INC, 1982.
- [116] J. Liu and P. Moulin. Information-theoretic analysis of interscale and intrascale dependencies between image wavelet coefficients. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(11) :1647–1658, November 2001.
- [117] A. Lorette. *Analyse de texture par méthodes markoviennes et par morphologie mathématique : application à l'analyse des zones urbaines sur des images satellitales*. PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, September 1999.
- [118] H. Maitre. Le traitement des images, 1999. ENST, Département TSI.
- [119] F. Malgouyres. Mathematical analysis of a model which combines total variation and wavelet for image restoration. *Journal of information processes*, 2(1) :1–10, 2002.
- [120] F. Malgouyres. Minimizing the total variation under a general convex constraint for image restoration. *IEEE transactions on image processing*, 11(12) :1450–1456, December 2002.
- [121] J. Malik and P. Perona. Preattentive texture discrimination with early vision mechanisms. *Journal of Optical Society of America A*, 7(5) :923–932, May 1990.
- [122] R. Malladi, J.A. Sethian, and B.C. Vemuri. Shape modeling with front propagation : A level set approach. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(2), February 1995.
- [123] S.G. Mallat. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of  $l^2(r)$ . *Transactions of the American Mathematical Society*, 315(1) :69–87, September 1989.
- [124] S.G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7) :674–693, July 1989.
- [125] S.G. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1998.
- [126] B. Manjunath and R. Chellappa. Unsupervised texture segmentation using Markov random fields models. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13 :478–482, May 1991.
- [127] P. Maréchal. Linear inverse problems in Hilbert spaces and applications in image science, July 2002. CEMRACS 02.
- [128] U. Massari. Esistenza e regolarità delle ipersuperfici di curvatura media assegnata in  $r^n$ . *Archive for Rational Mechanics and Analysis.*, 55 :357–382, 1974.
- [129] U. Massari and M. Miranda. *Minimal surfaces of codimension one*. North Holland, 1984.

- [130] U. Massari and I. Tamanini. Regularity properties of optimal segmentations. *J. reine angew. Math.*, 420 :61–84, 1991.
- [131] B. Matei. Methodes multi-résolution non-linéaires. Applications au traitement d'image, November 2002. Ph. D. Thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- [132] C. Menegaz, A. Rivoldini, and J.Ph. Thiran. Continuous directional dyadic wavelets as texture descriptors. In *SPIE*, pages 263–73, August 2000. Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII, San Diego, California (USA).
- [133] Yves Meyer. Oscillating patterns in image processing and in some nonlinear evolution equations, March 2001. The Fifteenth Dean Jacqueline B. Lewis Memorial Lectures.
- [134] N.G. Meyers and A. Elcrat. Some results on regularity for solutions of non-linear elliptic systems and quasi-regular functions. *Duke math. J.*, 42 :121–136, 1975.
- [135] A.A. Miljutin. A priori estimates for solutions of second order linear elliptic equations. *Mat. Sbornik*, pages 459–474, 1960. Russian.
- [136] C. Miranda. *Partial differential equations of elliptic type*. Springer-Verlag, second edition, 1970.
- [137] M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim, and J.M. Poggi. *Les ondelettes et leurs applications*. Traitement du Signal et de l'Image. Lavoisier, 2003.
- [138] J.M. Morel and S. Solimini. *Variational Methods in Image Segmentation*, volume 14 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Birkhauser, 1995.
- [139] D. Mumford and J. Shah. Boundary detection by minimizing functionals. In *Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*. SPIE, 1985. San Francisco.
- [140] J.M. Nicolas. Les satellites de télédétection : capteurs optiques et capteurs radar, 1999.
- [141] J.M. Nicolas, M. Sigelle, C. Thuillier, and F. Tupin. Images de radar à ouverture synthétique : transformée de Mellin et multirésolution. In *Seizième colloque GRETSI*, pages 797–800, September 1997.
- [142] S. Osher and R.P. Fedkiw. Level set methods : An overview and some recent results. *Journal of Computational Physics*, 169 :463–502, 2001.
- [143] S.J. Osher, A. Sole, and L.A. Vese. Image decomposition and restoration using total variation minimization and the  $H^{-1}$  norm. *Multiscale Modeling and Simulation : A SIAM Interdisciplinary Journal*, 1(3) :349–370, 2003.
- [144] N. Paragios and R. Deriche. Geodesic active regions and level set methods for supervised texture segmentation. *International Journal of Computer Vision*, 46(3), 2002.
- [145] N. K. Paragios. *Geodesic Active Regions and Level Set methods : Contributions and Applications in Artificial Vision*. PhD thesis, University of Nice Sophia Antipolis, January 2000.
- [146] D. Peng, B. Merriman, S. Osher, H. Zhao, and M. Kang. A PDE based fast local level set method. *Journal of Computational Physics*, 155(2), November 1998.
- [147] T. Rockafellar. *Convex Analysis*, volume 224 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Princeton University Press, second edition, 1983.
- [148] E. Rouy and A. Tourin. A viscosity solutions approach to shape-from-shading. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 29(3) :867–884, 1992.

- [149] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60 :259–268, 1992.
- [150] C. Samson. *Contribution à la classification d’images satellitaires par approche variationnelle et équations aux dérivées partielles*. PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, September 2000.
- [151] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and J. Zerubia. A level set method for image classification. *IJCV*, 40(3) :187–197, 2000.
- [152] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and J. Zerubia. A variational model for image classification and restoration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(5) :460–472, May 2000.
- [153] P. Scheunders, S. Liven, G. Van de Wouwer, P. Vautrot, and D. Van Dyck. Wavelet-based texture analysis. *International Journal Computer Science and Information management*, December 1997.
- [154] J. Serra. *Image Analysis Mathematical Morphology*, volume 2. Harcourt Brace Jovanovich, 1988.
- [155] P. Soravia. Boundary value problems for Hamilton-Jacobi equations with discontinuous Lagrangian. Preprint, Università di Padova, 2001.
- [156] P. Soravia. Optimal control with discontinuous running cost : eikonal equation and shape-from-shading. Preprint, Università di Padova, 2001.
- [157] J.L. Starck, M. ELad, and D.L. Donoho. Image decomposition : separation of texture from piecewise smooth content, 2003. To appear in IEEE Transactions on Image Processing.
- [158] M. Sussman, P. Smereka, and S. Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 114 :146–159, 1994.
- [159] R. Temam. Solutions généralisées de certaines équations de type hypersurfaces minima. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 44 :121–156, 1971.
- [160] R. Temam. *Navier Stokes equations*. Elsevier Science Publishers B.V., 1984.
- [161] F. Tupin. *Reconnaissance de formes et analyse de scènes en imagerie radar à ouverture synthétique*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Septembre 1997.
- [162] M. Tur, C. Chin, and J.W. Goodman. When is speckle noise multiplicative? *Applied Optics*, 21(7) :1157–1159, April 1982.
- [163] G. Unal, A. Yezzi, and H. Krim. Information-theoretic active polygons for unsupervised texture segmentation, June 2002. preprint available upon request, submitted.
- [164] M. Unser. Texture classification and segmentation using wavelet frames. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(11) :1549–1560, November 1995.
- [165] L.A. Vese and T.F. Chan. A multiphase level set framework for image segmentation using the Mumford and Shah model. *International Journal of Computer Vision*, 50(3) :271–293, 2002.
- [166] L.A. Vese and S.J. Osher. Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing. *Journal of Scientific Computing*, 19 :553–572, 2003.

- [167] K. Widman. Holder continuity of solutions of elliptic equations. *Manuscripta Math.*, 5 :299–308, 1971.
- [168] Y. Wu and H. Maitre. Smoothing speckled synthetic aperture radar images by using maximum homogeneous region filters. *Optical Engineering*, 31(8) :1785–1792, August 1992.
- [169] T.Y. Young and K.S. Fu, editors. *Handbook of Pattern Recognition and Image Processing*. Norman G. Einspruch, 1986.
- [170] Hong-Kai Zhao, T. Chan, B. Merriman, and S. Osher. A variational level set approach to multiphase motion. *Journal of Computational Physics*, 127 :179–195, July 1996.
- [171] Song Chu Zhu and A.Yuille. Region competition : unifying snakes, region growing, and Bayes/MDL for multi-band image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(9), 1996.



## Résumé

Cette thèse est un travail en mathématiques appliquées. Elle aborde quelques problèmes en analyse d'images et utilise des outils mathématiques spécifiques.

L'objectif des deux premières parties de cette thèse est de proposer un modèle pour décomposer une image  $f$  en trois composantes :  $f = u + v + w$ . La première composante,  $u$ , contient l'information géométrique. On peut la considérer comme une esquisse de l'image originale  $f$ . La seconde composante,  $v$ , contient l'information texture. La troisième composante,  $w$ , contient le bruit présent dans l'image originale. Notre approche repose sur l'utilisation d'espaces mathématiques adaptés à chaque composante : l'espace  $BV$  des fonctions à variations bornées pour  $u$ , un espace  $G$  proche du dual de  $BV$  pour les textures, et un espace de Besov d'exposant négatif  $E$  pour le bruit. Nous effectuons l'étude mathématique complète des différents modèles que nous proposons. Nous illustrons notre approche par de nombreux exemples, et donnons deux applications concrètes : une première en restauration d'images RSO, et une seconde en compression d'images.

Dans la troisième et dernière partie de cette thèse, nous nous intéressons spécifiquement à la composante texturée. Nous proposons un algorithme de classification supervisée pour les images texturées. L'approche utilisée est basée sur l'utilisation de la méthode des contours actifs et d'un terme d'attache aux données spécifiques aux textures. Ce dernier est construit à partir d'une transformée en paquets d'ondelettes. Nous obtenons ainsi une fonctionnelle, dont le minimum correspond à la classification cherchée. Nous résolvons numériquement ce problème à l'aide d'un système couplé d'EDP que nous plongeons dans un schéma dynamique. Nous illustrons notre démarche par de nombreux exemples numériques. Nous effectuons également l'étude théorique de la fonctionnelle de classification.

**Mots-clés**  $BV$ , espaces de Sobolev d'exposant négatif, espaces de Besov d'exposant négatif, dualité, analyse convexe, analyse fonctionnelle, solutions de viscosité, image, décomposition, restauration, classification.

## Abstract

This Ph.D. thesis is a work in applied mathematics. It deals with image processing problems, and uses specific mathematical tools.

The aim of the two first parts is to propose a model for decomposing an image  $f$  into three components :  $f = u + v + w$ . The first one,  $u$ , contains the geometrical information. It can be considered as a sketch of the original image  $f$ . The second one,  $v$ , contains the textures. The third one,  $w$ , contains the noise of the original image. Our approach relies on the use of mathematical spaces adapted to each component : the space  $BV$  of functions with bounded variations for  $u$ , a space  $G$  close to the dual space of  $BV$  for  $v$ , and a negative Besov space  $E$  for  $w$ . We carry out the complete mathematical analysis of the different models we propose. We illustrate our approach with many numerical examples, and we give two applications : a first one in SAR image restoration, and a second one in image compression.

In the third and last part, we only deal with the texture component of an image. We propose a supervised classification algorithm for textured images. Our approach relies on the use of the active contours method. We build a data term specific to textures thanks to a packet wavelet transform. We thus get a functional, whose minimum corresponds to the classification we look for. We numerically solve this problem with a coupled PDEs system. We illustrate our approach with many numerical examples. We also carry out the theoretical study of the classification functional.

**Key-words**  $BV$ , negative Sobolev spaces, negative Besov spaces, duality, convex analysis, functional analysis, viscosity solutions, image, decomposition, restoration, classification.